Комплексы: гомотопии и морфизмы
Семинар 38

Задача 1. Покажите, что

(a) ацикличный комплекс векторных пространств имеет стягивающую гомотопию;

(b) морфизмы комплексов конечномерных векторных пространств, дающие одинаковые отображения на гомологиях, гомотопны;

(c) конечномерный комплекс векторных пространств гомотопически эквивалентен своим гомологиям.

(d) Для каждого из предыдущих пунктов приведите пример комплекса абелевых групп, где соответствующее утверждение не выполняется.

Задача 2. При помощи гомотопии h найдите гомологии комплекса (V, d), если

(a) $V = \Lambda^{\bullet} W$, $d = v \wedge$ -, $h := i_{\xi}$;

(b) $V = \Lambda^{\bullet} W \otimes S^{\bullet} W$, $d = \sum_i (e_i \wedge \text{-}) \otimes \imath_{e^i}$, $h = \sum_i \imath_{e^i} \otimes (e_i \wedge \text{-})$;

(c) $V := \oplus_{n=1}^{\infty} A^{\otimes n}$, $d(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n$, $h(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) = 1 \otimes a_0 \otimes \ldots \otimes a_n$

Задача 3. **(a)** Пусть $f : A \to B$ и $g : B \to C$ — гомоморфизмы абелевых групп. Постройте точную последовательность

$$0 \to ker(f) \to ker(gf) \to ker(g) \to coker(f) \to coker(gf) \to coker(g) \to 0$$

(b) Свяжите с короткой точной последовательностью комплексов $0 \to K^{\bullet} \to L^{\bullet} \to M^{\bullet} \to 0$ длинную точную последовательность гомологий

$$\ldots \to H^i K \to H^i L \to H^i M \to H^{i+1} K \to H^{i+1} L \to \ldots$$

Задача 4. С морфизмом комплексов $f : K^{\bullet} \to L^{\bullet}$ свяжем комплекс, называемый конусом этого морфизма: $C(f)^i := K^{i+1} \oplus L^i$, $d_C^i((k^{i+1}, l^i)) := (-d_K^{i+1}(k^{i+1}), f(k^{i+1}) + d_L^i(l^i))$.

(a) Проверьте, что конус морфизма — комплекс, и постройте точную тройку комплексов $0 \to L^{\bullet} \to C(f) \to K[1]^{\bullet} \to 0$;

Покажите, что

(b) связующий гомоморфизм в соответствующей длинной точной последовательности гомологий совпадает с отображением $f : H(K) \to H(L)$.

(c) композиции морфизмов комплексов $K^{\bullet} \to L^{\bullet} \to C(f)$ и $C(f) \to K[1] \to L[1]$ гомотопны нулевым отображениям;

(d) f — квазиизомормизм тогда и только тогда, когда конус $C(f)$ ацикличен;

(e) f — гомотопическая эквивалентность тогда и только тогда, когда конус $C(f)$ гомотопен нулю.

Задача 5. Пусть дано отображение двух точных последовательностей:

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\
\downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_4} & & \downarrow{\scriptstyle f_5} \\
B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5
\end{array}$$

Покажите, что

(a) Если f_2 и f_4 инъективны, а f_1 сюръективен, то f_3 инъективен;

(b) Если f_2 и f_4 сюръективны, а f_5 инъективен, то f_3 сюръективен;

(c) Если f_1, f_2, f_4, f_5 — изоморфизмы, то f_3 — изоморфизм.