Комплексы
Семинар 37

Задача 1. Можно ли на пространстве V ввести градуировку так, чтобы пара (V, d) образовывала комплекс, если

(a) $V = \Lambda^\bullet W$, $d = v \wedge$ -;

(b) $V = \Lambda^\bullet W$, $d = \sum \imath_{e^i}$, где $\{e_1, \ldots, e_i\}$ – базис пространства W, а $\imath_{e^i}$ – свертка с i-ым базисным вектором двойственного пространства;

(c) $V = \Lambda^\bullet W \otimes S^\bullet W$, $d = \sum_i (e_i \wedge \text{-}) \otimes \imath_{e^i}$;

(d)* $V = \Lambda^\bullet W \otimes S^\bullet W$, $d = \sum_i (\imath_{e^i}) \otimes f_i' \cdot \frac{\partial}{\partial e_i}$, где $f = f(e_1, \ldots, e_n)$ – фиксированный многочлен от n переменных, который отождествляется с симметричным тензором из $S^\bullet W$;

(e) V имеет базис e_I, занумерованный подмножествами I множества $\{1, \ldots, n\}$, $d(e_{\{i_1 < \ldots < i_k\}}) := \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} e_{\{i_1 < \ldots < \hat{i_j} < \ldots < i_k\}}$;

(f) $V := \oplus_{n=1}^\infty A^{\otimes n}$, $d(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n$?

Задача 2. Пусть $A = \oplus_k A^k$ – градуированная алгебра, порожденная элементами $x_1, \ldots, x_n$, и d – дифференцирование A степени однородности $+1$. То есть $d(A^k) \subset A^{k+1}$ и для любой пары однородных элементов $a, b \in A$ выполнено $d(a \cdot b) = d(a) \cdot b + (-1)^{\deg(a)} a \cdot d(b)$. Докажите, что d задаёт дифференциал тогда и только тогда, когда $d^2(x_i) = 0$.

Задача 3. Для конечномерного градуированного векторного пространства $V^\bullet := \oplus_i V^i$ определим понятие эйлеровой характеристики $\chi(V^\bullet) := \sum_i (-1)^i \dim V^i$. Докажите, что у комплекса и у его когомологий одинаковые эйлеровы характеристики: $\chi(V^\bullet) = \chi(H^\bullet)$.

Задача 4. **(a)** Пусть $d \in End(V)$ – оператор, квадрат которого равен нулю, и пусть d действует в векторном пространстве V над полем $\Bbbk$. Найдите жорданову нормальную форму для d.

(b) Пусть $V^\bullet$ – комплекс конечномерных векторных пространств над полем $\Bbbk$. Докажите, что существует базис, в котором дифференциал переводит базисный вектор в базисный или в ноль.

Задача 5. Пусть $(V^\bullet, d_V)$ и $(W^\bullet, d_W)$ – пара комплексов конечномерных векторных пространств. Докажите, что

(a) на тензорном произведении можно ввести структуру комплекса следующим образом:

$$(V \otimes W)^k := \oplus_{i+j=k} V^i \otimes W^j \text{ и } d(v \otimes w) = d_V(v) \otimes w + (-1)^{\deg(v)} v \otimes d_W(w);$$

(b) эйлерова характеристика тензорного произведения комплексов равна произведению эйлеровых характеристик;

(c) когомологии тензорного произведения конечных комплексов конечномерных векторных пространств есть тензорное произведение их когомологий;

(d) пространство тензоров $\Lambda^2(V^{even}) \oplus V^{even} \otimes V^{odd} \oplus S^2 V^{odd}$ образует подкомплекс в $V \otimes V$.

(e)* Что можно сказать о когомологиях симметрических (кососимметрических) тензоров, если симметрическая (кососимметрическая) степень определяется с учетом знака, как в предыдущем пункте?

Задача 6. Пусть $(V^\bullet, d_V)$ – комплекс конечномерных векторных пространств над $\Bbbk$. Дайте определение

(a) двойственного комплекса так, чтобы $(V^*)^i := (V^{-i})^*$;

(b) комплекса гомоморфизмов $Hom_\Bbbk(V^\bullet, W^\bullet)$ и постройте канонический изоморфизм

$$Hom_\Bbbk(V, W) \simeq V^* \otimes_\Bbbk W.$$

Задача 7*. Если ещё не вычислили, то посчитайте когомологии комплексов из задачи 1 (a),(b),(c),(e).

Задача 8. Пусть $C^\bullet$ – (конечный) комплекс абелевых групп. Докажите, что

(a) не всегда можно выбрать базис из порождающих такой, что дифференциал переводит базисные вектора в базисные;

(b) если $C^\bullet$ конечно порожден, то понятие эйлеровой характеристики $\chi(C) := \sum_i (-1)^i \mathsf{rk} C^i$ корректно определено и эйлеровы характеристики комплекса и его когомологий совпадают;

(c)* тензорное произведение комплексов абелевых групп корректно определено, однако его когомологии не всегда равны тензорному произведению когомологий исходных комплексов.