Разное о тензорах
Семинар 36

Задача 1. Верно ли, что следующие пары подпространств тензоров (канонически) изоморфны:
(a) $S^n(V \otimes W) \cap S^nV \otimes W^n$ и $S^nV \otimes S^nW$;
(b) $\Lambda^n(V \otimes W) \cap \Lambda^nV \otimes W^n$ и $\Lambda^nV \otimes S^nW$;
(c) $S^n(V \otimes W) \cap \Lambda^nV \otimes W^n$ и $\Lambda^nV \otimes \Lambda^nW$.

Задача 2. Вычислите производящую функцию размерностей **(a)** тензорной алгебры $T(V) := \oplus_{k=0}^{\infty} V^{\otimes n}$; **(b)** симметрической алгебры $S^{\bullet}V = \oplus_{k=0}^{\infty} S^kV$; **(c)** грассмановой алгебры $\Lambda^{\bullet}V := \oplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^kV$

Задача 3. Коалгеброй над полем $\Bbbk$ называется следующая тройка: векторное пространство A, отображение коумножения $\mu : A \to A \otimes A$, удовлетворяющее свойству коассоциативности:

$$(\mu \otimes Id_A) \circ \mu = (Id_A \otimes \mu) \circ \mu, \text{ как отображения из } A \text{ в } A^{\otimes 3};$$

и отображение коединицы $\epsilon : A \to \Bbbk$ с условием $(Id_A \otimes \epsilon) \circ \mu = Id_A = (\epsilon \otimes Id_A) \circ \mu$.

(a) Покажите, что если A – конечномерна, то на двойственном пространстве A^* есть структура алгебры с единицей, происходящая из отображений двойственных к μ и ϵ.

(b) Покажите, что набор отображений $\mu_n : V^{\otimes n} \to \oplus_{k+l=n} V^{\otimes k} \bigotimes V^{\otimes l}$, отображающий разложимый тензор $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ в сумму $\sum_{i=0}^{n} v_1 \otimes \ldots \otimes v_i \bigotimes v_{i+1} \otimes \ldots \otimes v_n$ определяет структуру коалгебры на $T(V) := \oplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$;

(c) Проверьте, что отображение, сопоставляющее вектору $v \to v \otimes 1 + 1 \otimes v$, продолжается до отображения $\mu : S^{\bullet}V \otimes S^{\bullet}V$, определяющего структуру коалгебры на симметрической алгебре;

(d)* Постройте структуру коалгебры на внешней алгебре $\Lambda^{\bullet}V$.

Задача 4. Пусть V – конечномерное векторное пространство, R – подпространство в тензорном квадрате $V \otimes V$, $Ann(R)$ – подпространство в тензорном квадрате двойственного пространства $V^* \otimes V^*$ аннулирующее R. Определим квадратичную алгебру $\Bbbk\langle V|R\rangle$, как фактор тензорной алгебры $T(V)$ по идеалу соотношений, порожденному R. Назовем квадратично-двойственной алгебру $\Bbbk\langle V^*|Ann(R)\rangle$, полученную путем факторизации тензорной алгебры от двойственного пространства по двойственному набору соотношений. Алгебра, квадратично-двойственная к A, обозначается $A^!$

(a)* Не пользуясь определением квадратично двойственной алгебры, дайте определение квадратично-двойственной коалгебры $A^{¡}$. Коалгебра $A^{¡}$ копорождена пространством V и её квадратичная компонента изоморфна R.

(b) Докажите, что симметрическая и грасманнова алгебры квадратично двойственны;

(c) Найдите квадратично-двойственную (ко)алгебру к тензорной алгебре;

(d) Найдите квадратично-двойственную (ко)алгебру к алгебре $\Bbbk\langle x_1, \ldots, x_n | x_ix_j = qx_jx_i, i < j\rangle$;

(e) Докажите, что n-ая градуированная компонента алгебры A изоморфна $V^{\otimes n}/(+_{i=1}^{n-1} V^{i-1} \otimes R \otimes V^{n-i-1})$, соответственно n-ая градуированная компонента квадратично-двойственной алгебры $A^!$ двойственна пространству $\cap_{i=1}^{n-1} V^{i-1} \otimes R \otimes V^{n-i-1}$.

(f)* Обозначим за d композицию отображений $A \otimes A^{¡} \stackrel{Id_A \otimes \mu_{A^{¡}}}{\to} A \otimes (V \otimes A^{¡}) \stackrel{mult_A \otimes Id_{A^{¡}}}{\to} A \otimes A^{¡}$. Докажите, что $d^2 = 0$.