Мульти-тензоры
Семинар 35

Задача 1. Число называется алгебраическим числом (соотв. целым алгебраическим), если оно является корнем многочлена с целыми коэффициентами (и старшим коэффициентом равным единице).

(a) Докажите, что число является (целым) алгебраическим, если и только если оно является собственным значением матрицы с рациональными (целыми) коэффициентами.

(b) Воспользовавшись тензорным произведением линейных операторов, докажите что сумма, разность и произведение (целых) алгебраических чисел является (целым) алгебраическим числом.

Задача 2. Пусть V – конечномерное векторное пространство над $\mathbb{Q}$ размерности n и $\alpha \in S^2V$ – тензор, который не может быть представлен в виде суммы $(n-1)$-го разложимого тензора.

(a) Докажите что тензор α представляется в виде суммы n разложимых тензоров. То есть $\alpha = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i$.

(b) Введем на V скалярное произведение, положив $\langle v_i, w_j \rangle = \delta_{ij}$. Докажите, что данное определение корректно, то есть не зависит от разложения $\alpha = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i$.

(c) Докажите, что описанное построение обратимо, то есть с каждым невыроженным скалярным произведением $\langle -, - \rangle$ на V можно связать единственный бивектор $\alpha \in S^2V$.

(d)* Как изменится задача, если рассматривать несимметричное и кососимметричное спаривания?

Задача 3. Докажите, что над полем $\Bbbk$ характеристики 0

(a) любая симметричная билинейная функция $g : V \times V \to \Bbbk$ однозначно восстанавливается по своему ограничению на диагональ $\Delta := \{(v, v) | v \in V\}$;

(b) любая симметричная полилинейная функция $g : V \times V \times \ldots \times V \to \Bbbk$ однозначно восстанавливается по своему ограничению на диагональ $\Delta := \{(v, v, \ldots, v) | v \in V\}$;

(c) подпространство симметричных тензоров S^kV линейно порождается тензорами вида $v^{\otimes k}$;

(d) линейные операторы из $End(V^{\otimes k})$, перестановочные с действием всех перестановок $\sigma \in \mathbb{S}_k$, являются линейным подпространством, порожденным операторами вида $f^{\otimes k}$.

Задача 4.

(a) Предъявите базис и вычислите размерность в пространстве симметричных S^kV и кососимметричных Λ^kV тензоров k-го порядка.

(b) Постройте канонические изоморфизмы

$$\oplus_{k=0}^{m} S^kU \otimes S^{m-k}V \to S^m(U \oplus V)$$
$$\oplus_{k=0}^{m} \Lambda^kU \otimes \Lambda^{m-k}V \to \Lambda^m(U \oplus V).$$

Задача 5. Зафиксируем линейный оператор $A : V \to V$. Докажите, что матрица оператора внешней степени $\Lambda^k(A)$ в базисе $e_I := e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$ для $I = \{i_1 < \ldots < i_k\}$ есть матрица миноров k-ого порядка для матрицы A.

Задача 6. Пусть $\chi(z) := \det(E - zA)$ – характеристический многочлен линейного оператора $A : V \to V$. Выразите следы **(a)** $tr(\Lambda^k(A))$; **(b)** $tr(S^k(A))$
через коэффициенты $\chi(z)$ и обратного ряда $1/\chi(z)$.

Задача 7. Пусть $\dim V = n$. С каждым k-вектором $\omega \in \Lambda^k(V)$ свяжем два подпространства $\Omega_\omega := \{\xi \in V^* | i_\xi(\omega) = 0\} \subset V^*$ и $W_\omega = \{v \in V | v \wedge \omega =\} \subset V$. Докажите, что следующие условия на поливектор $\omega \in \Lambda^k(V)$ эквивалентны:

(a) ω разложим; **(b)** $\dim W_\omega = k$; **(c)** $\dim \Omega_\omega = n - k$; **(d)** $Ann(\Omega_\omega) = W_\omega$;

(e) $\forall \xi \in \Lambda^{k+1}(V^*)$ $c_{11}(c_{\{12\ldots k\}\{12\ldots k\}}(\xi \otimes \omega) \otimes \omega) = 0$ в $\Lambda^{k-1}(V)$;

(f) $\forall \xi \in \Lambda^{k-1}(V^*)$ $c_{\{12\ldots k-1\}\{12\ldots k-1\}}(\xi \otimes \omega) \wedge \omega = 0$ в $\Lambda^{k+1}(V)$.

(Через $c_{IJ}(v)$ обозначается свертка тензора v по подмножеству I верхних индексов и множеству J нижних индексов). Перепишите условие из двух последних пунктов в виде явного конечного набора квадратичных соотношений на координаты поливектора в стандартном базисе e_I.