Двойственное пространство (напоминание из 1-го семестра). Канонические изоморфизмы

Семинар 34

Задача 1. Пусть V_n – пространство многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше n. Доказать, что следующие системы являются базисами сопряженного пространства V_n^*

(a) $\{\alpha^i(f) := f(i) \mid i = 0, \dots, n\}$; **(b)** $\{\beta^i(f) := f^{(i)}(0) \mid i = 0, \dots, n\}$;

(c) $\{\gamma^i(f) := \int_0^{i+1} f(x)dx \mid i = 0, \dots, n\}$.

Задача 2.

(a) Докажите, что для конечномерного V имеется канонический изоморфизм $(V^*)^* \to V$.

(b) Приведите пример векторного пространства, для которого дважды двойственное пространство $(V^*)^*$ не изоморфно исходному V.

Задача 3. Постройте там, где это возможно, канонические изоморфизмы для конечномерных векторных пространств U, V и W:

(a) $U \otimes V \cong V \otimes U$;

(b) $(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$;

(c) $(U \oplus V) \otimes W \cong (U \otimes W) \oplus (V \otimes W)$;

(d) $(U \otimes V)^* \cong U^* \otimes V^*$;

(e) $U^* \otimes W \cong Hom(U, W)$;

(f) $Hom(Hom(U, V), W) \cong Hom(V, U \otimes W)$.

Задача 4. Обозначим за α_V каноническое отождествление пространства эндоморфизмов $Hom(V, V)$ конечномерного векторного пространства V со своим двойственным $Hom(V, V)^*$. Найдите образ α_V от матричной единицы и от тождественного оператора.

Задача 5. Пусть линейные операторы A и B при отождествлении $Hom(V, V)$ с $V^* \otimes V$ записываются тензорами $\sum_i \varphi^i \otimes u_i$ и $\sum_j \psi^j \otimes v_j$. Докажите, что композиция операторов AB может быть представлена в виде $\sum_j \psi^j \otimes w_j$ и в виде $\sum_i \eta^i \otimes u_i$. Как выражаются w_j и η_i через $\varphi^i, u_i, \psi^j, v_j$?

Используя обозначения первой задачи, опишите композицию операторов $(\sum_i \beta^i \otimes x^{n-i})(\sum_j \alpha^j \otimes x^j)$.

Задача 6. Пусть $\Bbbk$ – подполе поля $\mathbb{F}$, V и W – векторные пространства над $\Bbbk$. Постройте канонические изоморфизмы векторных пространств над $\mathbb{F}$

(a) $Hom_{\mathbb{F}}(\mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} V, \mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} W) \cong \mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} Hom_{\Bbbk}(V, W)$;

(b) $(\mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} V) \otimes_{\mathbb{F}} (\mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} W) \cong \mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} (V \otimes_{\Bbbk} W)$.

Задача 7. Найдите размерность пространства билинейных форм $\varphi\colon V \times V \to \Bbbk$, удовлетворяющих для любых $u, v \in V$ условиям: **(a)** $\varphi(v, v) = 0$; **(b)** $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$.

Задача 8. Найдите размерность пространства трилинейных форм $\varphi\colon V \times V \times V \to \Bbbk$, удовлетворяющих для любых $u, v, w \in V$ условиям: **(a)** $\varphi(u, v, w) = \varphi(v, u, w) = \varphi(u, w, v)$; **(b)** $\varphi(u, v, w) = \varphi(v, u, w)$; **(c)** $\varphi(u, v, w) = \varphi(v, u, w) = \varphi(u, w, w)$; **(d)** $\varphi(u, v, v) = \varphi(u, u, v) = 0$; **(e)** $\varphi(u, u, u) = 0$; **(f)** $\varphi(u, v, w) = \varphi(w, v, u)$; **(g)** $\varphi(u, v, w) + \varphi(v, w, u) + \varphi(w, u, v) = 0$.

Задача 9. Постройте изоморфизм $\mathbb{C}$-алгебр: комплексификации кватернионов $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$ и матричной алгебры $Mat_{2\times 2}(\mathbb{C})$.