Тензорное произведение
Семинар 33

Обозначения: Если не оговорено дополнительно, то предполагается, что в векторном пространстве V над $\Bbbk$ выбран базис $e_1, \ldots, e_n$, а в векторном пространстве W зафиксирован базис $f_1, \ldots, f_m$. Через $V \otimes W$ обозначено тензорное произведение пространств V и W над тем же полем скаляров $\Bbbk$.

Задача 1. Найдите координаты разложения тензора $u \in V \otimes W$ в базисе $e_i \otimes f_j$:

(a) $u = (e_1+2e_2)\otimes(f_1+2f_2)-(e_1+e_2)\otimes(f_1+2f_2)$; **(b)** $u = (e_1+2e_2)\otimes(f_3+f_2)-(e_1-2e_2)\otimes(f_3-f_4)$;

Найдите координаты разложения тензора $u \in V \otimes V$ в базисе $e_i \otimes e_j$:

(c) $u = (e_1 + e_2) \otimes (e_1 + e_2)$; **(d)** $u = (e_1 + e_2) \otimes (e_1 - e_2)$.

Задача 2. Пусть $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ — новые базисы в $V = \Bbbk^3$. Линейный оператор A имеет матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ в базисе (e_1, e_2, e_3).

(a) Найдите разложение вектора $(e_1 + e_2) \otimes (e_1 + e_2) \in V \otimes V$ по базису $\tilde{e}_i \otimes \tilde{e}_j$.

(b) Вычислите координаты вектора $(A \otimes A)((\tilde{e}_1 + \tilde{e}_2) \otimes \tilde{e}_2)$ в базисах $\tilde{e}_i \otimes \tilde{e}_j$, $\tilde{e}_i \otimes e_j$ и $e_i \otimes e_j$ соответственно.

Задача 3. Выразите собственные значения оператора $A \otimes B$ через собственные значения линейных операторов A и B.

Задача 4. Верно ли, что если операторы A и B диагонализуемы, то диагонализуем и оператор $A \otimes B$?

Задача 5. Пусть даны характеристические многочлены линейных операторов $A \in End(V)$ и $B \in End(W)$. Найдите

(a) $tr(A \otimes B)$; **(b)** $tr((A \otimes B)^2)$; **(c)** $\det(A \otimes B)$.

Задача 6. Как выглядит жорданова нормальная форма оператора $A \otimes B$, если жордановы нормальные формы операторов A и B имеют вид:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; **(b)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; **(c)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Задача 7. Назовем тензор $u \in V \otimes W$ разложимым, если найдутся такие векторы $v \in V$ и $w \in W$, такие что $u = v \otimes w$.

(a) Разложимы ли следующие векторы:

$$2e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_1 + 4e_1 \otimes f_2 + 2e_2 \otimes f_2; \quad e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2; \quad 2e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_1 + 4e_1 \otimes f_2.$$

(b) Сколько разложимых векторов в $\mathbb{F}_p^n \otimes \mathbb{F}_p^m$?

Задача 8. Скажем, что вектор $u \in V \otimes W$ называется k-разложимым, если он может быть представлен в виде суммы k разложимых слагаемых $v_1 \otimes w_1 + \ldots + v_k \otimes w_k$ ($v_i \in V$, $w_j \in W$) и не может быть представлен в виде суммы $k - 1$ разложимого тензора.

(a) Покажите, что для k-разложимого вектора u набор $v_1, \ldots, v_k$ в его разложении линейно независим в V.

(b) Для каких k бывает нетривиальный k-разложимый вектор в $V \otimes W$, если размерность V равна n, а размерность W равна m?

Задача 9. Линейный оператор $C \in End(V \otimes W)$ называется разложимым, если $C = A \otimes B$.

(a) Предъявите пример неразложимого оператора.

(b) Верно ли, что любой линейный оператор из $End(V \otimes W)$ представляется в виде суммы разложимых?

Задача 10. Верно ли, что тензорное произведение над $\mathbb{Q}$ расширений поля $\mathbb{Q}$

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ **(b)** $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ является полем?

Какова размерность над $\mathbb{Q}$ описанных тензорных произведений?