Расширения полей
Семинар 32

Задача 1. Докажите, что $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Найдите минимальный многочлен для $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ над $\mathbb{Q}$.

Задача 2. Пусть α – корень неприводимого многочлена над $\Bbbk$ нечетной степени. Докажите, что $\Bbbk(\alpha) = \Bbbk(\alpha^2)$.

Задача 3. Пусть $\Bbbk$ – поле, а x – свободная переменная. Пусть $y = \frac{x^3}{x+1}$. Найти минимальный многочлен для x над полем $\Bbbk(y)$.

Задача 4. Покажите, что степень $\dim_{\Bbbk} \mathbb{F}$ поля разложения $\mathbb{F}$ многочлена $f(x) \in \Bbbk[x]$ степени n не превосходит $n!$.

Задача 5. Найдите степени полей разложения над $\mathbb{Q}$ многочленов:
(a) $x^3 - 2$; **(b)** $x^4 - 1$; **(c)** $x^4 + 1$; **(d)** $x^6 + 1$; **(e)** $(x^2+1)(x^3-1)$; **(f)** $x^6 + x^3 + 1$.

Задача 6. Зафиксируем простое число p.

(a) Покажите, что поле $\mathbb{F}_{p^n}$ есть поле разложение многочлена $x^{p^n} - x$ над $\mathbb{F}_p$.

(b) Найдите необходимое и достаточное условие того, что поле $\mathbb{F}_{p^n}$ есть подполе поля $\mathbb{F}_{p^m}$.

(c) Покажите, что конечное поле не является алгебраически замкнутым.

(d)* Докажите, что $\cup_{n\geqslant 0}\mathbb{F}_{p^{n!}}$ является алгебраическим замыканием поля $\mathbb{F}_p$.

Задача 7. Покажите, что поля $\mathbb{F}_3[x]/(x^2+x+2)$ и $\mathbb{F}_3[x]/(x^2+2x+2)$ изоморфны. Постройте изоморфизм явно.

Задача 8. Покажите, что в кольце формальных степенных рядов от матричных коэффициентов a_{ij} матрицы A выполнено равенство

$$\ln(\det(E - A)) = tr\ln(E - A).$$