Ещё о симметрических функциях

Семинар 31

Задача 1. Пусть отношение $\frac{f(x_1,\ldots,x_n)}{g(x_1,\ldots,x_n)}$ двух многочленов с целыми коэффициентами от n-переменных является функцией, симметричной по своим аргументам. Докажите, что оно может быть представлено в виде отношение двух многочленов от элементарных симметрических функций $\frac{\tilde{f}(e_1,\ldots,e_n)}{\tilde{g}(e_1,\ldots,e_n)}$.

Задача 2. *основная теорема алгебры.* Предлагается серия задач, использующая минимальные знания из анализа и симметрические функции, которая позволяет доказать, что любой многочлен $f(x)$ степени $n = 2^r(2k+1)$ с вещественными коэффициентами имеет комплексный корень. Доказательство ведётся индукцией по числу r.

(a) Докажите, что многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет вещественный корень.

(b) Пусть c – произвольное вещественное число, а $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ набор корней многочлена $f(x) = x^n + \ldots + a_n$ в поле его разложения. Докажите, что многочлен $g(x) := \prod_{i<j}(x - ((\alpha_i+\alpha_j) + c\alpha_i\alpha_j)))$ является многочленом с вещественными коэффициентами.

(c) Воспользовавшись индукцией по r, докажите, что существует пара различных индексов i, j и пара различных вещественных чисел c_1, c_2 таких, что числа $((\alpha_i+\alpha_j)+c_1\alpha_i\alpha_j)$ и $((\alpha_i+\alpha_j)+c_2\alpha_i\alpha_j)$ являются комплексными числами.

(d) Докажите, что любой многочлен с вещественными коэффициентами имеет комплексный корень;

(e) Докажите, что поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто.

Задача 3. Введем на диаграммах Юнга (разбиениях числа n) лексикографический порядок:

$$\lambda > \mu \overset{def}{\leftrightarrow} (\forall i < k\ \lambda_i = \mu_i)\ \&\ (\lambda_k > \mu_k).$$

Докажите, что $e_{\lambda^t} = m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} c_{\lambda,\mu} m_\mu$.

Задача 4. Определим автоморфизм ω кольца симметрических функций, положив $\omega(e_r) = h_r$. Покажите, что **(a)** ω – корректно определен; **(b)** $\omega^2 = 1$;

(c) Вычислите значение ω на степенных суммах.

Задача 5. Докажите детерминантные формулы, выражающие одни симметрические функции через другие:

(a) $p_n = \begin{vmatrix} e_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 2e_2 & e_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n-1)e_{n-1} & e_{n-2} & e_{n-3} & \ldots & 1 \\ ne_n & e_{n-1} & e_{n-2} & \ldots & e_1 \end{vmatrix}$; **(b)** $n!e_n = \begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ p_2 & p_2 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n-1} & p_{n-2} & p_{n-3} & \ldots & n-1 \\ p_n & p_{n-1} & p_{n-2} & \ldots & p_1 \end{vmatrix}$; **(c)** Воспользуйтесь автоморфизмом ω и напишите аналогичные детерминантные формулы, связывающие полные симметрические функции и степенные суммы.