Результант и Дискриминант
Семинар 30

Задача 1. *(повторение лекционного материала).* Даны два многочлена $f(x) = a_0x^n + \ldots + a_n$ и $g(x) = b_0x^m + \ldots + b_m$ с корнями $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_1, \ldots, \beta_m$ соответственно. Покажите, что следующие определения результанта равносильны: **(a)** $R(f,g) := a_0^m b_0^n \prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} (\alpha_i - \beta_j)$;

(b) $R(f,g) := a_0^m \prod_{1\leqslant j\leqslant n} g(\alpha_i)$; **(c)** $R(f,g) := \det \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & \ldots & a_{n-1} & a_n & 0 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & & & & & \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_m & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_0 & \ldots & b_{m-1} & b_m & 0 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & & & & & \end{vmatrix}$.

Задача 2. Покажите, что результат деления с остатком $f = qg + r$ может быть использован для вычисления результанта $R(f,g) = b_0^{\deg f - \deg r} R(r,g)$.

Задача 3. Докажите, что **(a)** $R(f, g_1g_2) = R(f,g_1)R(f,g_2)$; **(b)** $R(f,g) = (-1)^{\deg f \deg g} R(g,f)$.

Задача 4. Вычислите результант многочленов
(a) $x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ и $2x^2 - x - 1$;
(b) $2x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ и $x^2 + x + 3$.

Задача 5. Исключить x из системы уравнений
(a) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 & = 3 \\ x^2y + xy^2 & = 6 \end{cases}$; **(b)** $\begin{cases} x^3 - xy - y^3 + y & = 0 \\ x^2 + x - y^2 & = 1 \end{cases}$

Задача 6. Пусть на плоскости задана рациональная параметризация $(x(t), y(t))$ алгебраической кривой. Напишите уравнение, задающее эту кривую, если
(a) $x(t) = t^2,\ y(t) = t^2(t+1)$;
(b) $x(t) = \frac{t(t^2+1)}{t^4+1},\ y(t) = \frac{t(t^2-1)}{t^4+1}$;

Задача 7. Найти дискриминант многочленов:
(a) $ax^2 + bx + c$; **(b)** $x^3 + px + q$; **(c)** $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$.

Задача 8. Доказать, что **(a)** $D[(x-a)f(x)] = f(a)^2 D[f(x)]$; **(b)** $D[fg] = D[f]D[g][R(f,g)]^2$.

Задача 9. Вычислить дискриминант многочлена: **(a)** $1 + x + \ldots + x^n$; **(b)** $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$.

Задача 10. Покажите, что результант $R[f(x), g(t-x)]$ есть многочлен по t.
(a) Какова его степень? **(b)** Выразите его корни через корни $f(x)$ и $g(x)$.

Задача 11. Покажите, что существуют многочлены $r(x)$ и $s(x)$, коэффициенты которых есть многочлены с целыми коэффициентами от букв a_i и b_j, а степени которых не превосходят $m-1$ и $n-1$ соответственно, так что $R(f,g) = r(x)f(x) + s(x)g(x)$, где $f(x) = a_0x^n + \ldots + a_n$ и $g(x) = b_0x^m + \ldots + b_m$.