Линейные Уравнения и Метод Гаусса
Семинар 2.

Задача 1. *из школьных учебников* Группа из школьников и их сопровождающих отправилось на экскурсию во Владимир. Во Владимиро-Суздальском музее-заповеднике было потрачено 1140 рублей (Цена взрослого билета составляла 80р, на пенсионера и школьника билет стоил 30 и 50 рублей соответственно). В Дом-музее Столетовых было потрачено 1690 (цена взрослого, школьного и детского билетов равнялась 100, 80 и 50 рублей). После экскурсии на питание в общественной столовой было потрачено 3150 рублей (одна порция стоила 150 рублей). Сколько детей, родителей и бабушек с дедушками принимало участие в экскурсии.

Задача 2. Найти общее и частное решение системы линейных уравнений над $\mathbb{Q}$ методом Гаусса

$$\begin{cases} -9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3 \\ -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$$

Задача 3. Решить систему линейных уравнений

$$(a) \begin{cases} x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha = \cos\beta \\ -x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha = \sin\beta. \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Задача 4. Найдите многочлен $f(x)$ второй степени с комплексными коэффициентами, такой что $f(1) = 8$, $f(-1) = 2$, $f(i) = 3 + 3i$.

Задача 5. Доказать, что всякую систему линейных уравнений над полем можно привести к ступенчатому виду преобразованиями II-го типа.

Задача 6. Предположим, что система линейных уравнений $\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = c_n \end{cases}$ с целыми коэффициентами a_{ij} имеет единственное рациональное решение $\{\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}\}$. Докажите, что знаменатели q_i являются делителями числа $\Delta_1 \cdot \Delta_2, \cdot \ldots \cdot \Delta_n$, где Δ_i есть наибольший общий делитель миноров размера i.

чтобы не вводить определение миноров, решить задачу для $n = 2$.

Задача 7. Пусть $Ax = 0$ и $Bx = 0$ две системы однородных линейных уравнений, решения которых совпадают. Докажите, что от одной системы к другой можно перейти преобразованиями строк.

Задача 8. Пусть $\mathbb{F}_q$ поле из q элементов. Сколько решений может иметь система из
(a) m однородных уравнений на n неизвестных с коэффициентами из $\mathbb{F}_q$,
(b) система из m неоднородных уравнений на n неизвестных с коэффициентами из $\mathbb{F}_q$.
Разберите отдельно случай $m = 1, 2$.

Задача 9. Пусть $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ последовательность чисел удовлетворяющих рекурентному соотношению длины k

$$a_{n+k} = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + \ldots + c_{k-1} a_{n-k+1}, \ c_i \in \Bbbk$$

Тогда при любых начальных условиях производящая функция $a(t) := \sum a_n t^n$ рациональна (то есть является отношением двух многочленов).

Та же задача, когда рекуррента включает в себя 2 последовательности $\{a_n, b_n | n \in \mathbb{N}\}$:

$$\begin{cases} a_{n+k} = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + \ldots + c_{k-1} a_{n-k+1} + d_0 b_n + \ldots + d_{k-1} b_{n+k-1}, \\ b_{n+k} = e_0 a_n + \ldots + e_{k-1} a_{n-k+1} + f_0 b_n + \ldots + f_{k-1} b_{n+k-1} \end{cases}$$

Докажите, что при любых начальных данных функции $a(t) = \sum_{n \geqslant 0} a_n t^n$ и $b(t) = \sum_{n \geqslant 0} b_n t^n$ являются рациональными. Тот же вопрос для системы из m функций.

Указание: Воспользуйтесь тем, что множество рациональных функций $\mathbb{Q}(t)$ образует поле.

Докажите, что знаменатели этих функций не зависят от выбора начальных условий.

Задача 10. Вычислите производящую функцию множества путей в графе с 3 вершинами, матрица смежности которого имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Указание: рассмотреть рекурренту на последовательности a_n, b_n, c_n, определенных, как множество путей длины n, которые заканчиваются в первой, второй и третьей вершинах соответсвенно.