

Симметрические функции (продолжение)

Семинар 29

Задача 1. Найдите число элементов в орбите симметрической группы S_k на наборе $\{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k\}$ целых неотрицательных чисел ($\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$).

Задача 2. Пусть σ перестановка с цикловым типом $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_k$. Пусть m_i — число индексов s , таких что $\rho_s = i$. Докажите, что порядок централизатора σ (подгруппы перестановок, коммутирующих с σ) равен $\prod_i i^{m_i} m_i!$.

Задача 3. Используя выражение производящих функций для элементарных симметрических функций, полных симметрических функций и сумм Ньютона, напишите явное выражение для

- (a) h_k через e_i ; (b) $h_{n+1}(x_1, \dots, x_n)$ через $h_i(x_1, \dots, x_n)$ для $i = 1, \dots, n$; (c) e_k через h_i ;
(d) p_i через e_k ; (e) p_i через h_k ; (f) h_k через p_i ; (g) e_k через p_i .

Задача 4. Многочлен $\Phi_n(x) := \prod_{\substack{0 \leq k < n \\ (k,n)=1}} (x - \exp(2\pi i \frac{k}{n}))$ называется круговым многочленом.

(a) Докажите, что многочлен $\Phi_n(x)$ имеет целые коэффициенты.

(b) Докажите, что любой симметрический многочлен с целыми коэффициентами от примитивных корней из единицы фиксированной степени n является целым числом.

(c) Вычислите сумму k -ых степеней нетривиальных корней степени p из единицы, для простого числа p .

Задача 5. Пусть (x_1, x_2, \dots) и (y_1, y_2, \dots) два (бесконечных) набора переменных. Зафиксируем разложение

$$\prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda \vdash n} u_{\lambda}(x) v_{\lambda}(y), \quad (1)$$

где сумма идет по всем разбиениям $\lambda \vdash n$, а многочлены $u_{\lambda}(x)$ (соответственно $v_{\lambda}(y)$) являются однородными симметрическими многочленами степени n . Определим скалярное произведение на однородных симметрических многочленах степени n , положив $\langle u_{\lambda}(x), v_{\mu}(x) \rangle = \delta_{\lambda, \mu}$.

(a) Докажите, что скалярное произведение невырождено и не зависит от разложения (??);

(b) Докажите, что базис из полных симметрических функций h_{λ} и мономиальный базисы m_{μ} являются двойственными базисами;

(c) Докажите, что базис из мономов Ньютона p_{λ} является ортогональным; вычислите $\langle p_{\lambda}, p_{\lambda} \rangle$.

Указание: Воспользуйтесь производящими функциями для полиномов Ньютона и полных симметрических функций по одному из наборов переменных.