Симметрические функции
Семинар 28

Задача 1. Выразите в виде многочленов от элементарных симметрических:
(a) $x_1^2+\ldots+x_n^2$; **(b)** $x_1^3+\ldots+x_n^3$; **(c)** $x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_3x_1^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$; **(d)** $\sum_{i\neq j}x_i^2x_j$ (симметризацию многочлена $x_1^2x_2$).

Задача 2. Найдите сумму квадратов, сумму кубов и произведение всех комплексных корней многочлена
(a) $2x^3+3x^2-1$; **(b)** x^4-x^2+x+1.

Задача 3. Найдите сумму чисел, обратных к корням многочлена
(a) $2x^3+3x^2-1$; **(b)** x^4-x^2+x+1.

Задача 4. Пусть $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0\\ 1 & a & 1 & 0\\ 0 & 1 & a & 1\\ 0 & 0 & 1 & a\end{pmatrix}$ – трехдиагональная матрица.

Вычислите **(a)** $tr(A^2)$; **(b)** $tr(A^3)$; **(c)** $tr(A^{-1})$; **(d)** $tr(A^{-2})$.

Задача 5. Найти многочлен третьей степени, корнями которого являются:
(a) кубы комплексных корней многочлена x^3-x-1;
(b) четвертые степени комплексных корней многочлена $2x^3-x^2+2$.

Задача 6. Пусть $p(n,k)$ — число линейно независимых симметрических многочленов степени n от k переменных.
(a) Докажите, что при $k\geqslant n$ получаем $p(n,k)=p(n,n)$.
(b) Докажите, что $p(n,k)$ равно числу разбиений числа n в виде суммы k целых неотрицательных чисел.
(c) Напишите производящую функцию $f_k(t):=\sum_{n\geqslant 0}p(n,k)t^n$ в виде отношения двух многочленов.
(d) Вычислите $p(n,2)$ и $p(5,5)$.

Задача 7. Будем обозначать греческой буквой $\lambda=\{\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\ldots\geqslant\lambda_k\geqslant 0\}$ разбиение числа $n=\sum_{i=1}^k\lambda_i$ длины k (сокращённо $\lambda\vdash n$), а за λ^t обозначим разбиение числа n такое, что $\lambda_i^t:=|\{j:\lambda_j\geqslant i\}|$ (λ^t называется транспонированным разбиением). Верно ли, что набор $\{f_\lambda|\lambda\vdash n\}$ образует базис над $\mathbb{Q}$ в векторном пространстве симметрических многочленов степени n от k переменных с рациональными коэффициентами, если
(a) $f_\lambda=\sum_{\alpha\in S_k\lambda}x_1^{\alpha_1}\ldots x_k^{\alpha_k}$, где $S_k\lambda$ – обозначает орбиту набора $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_k\}$ под действием группы перестановок S_k;
(b) $f_\lambda=e_{\lambda_1}\ldots e_{\lambda_k}$, где e_r обозначает r-ую элементарную симметрическую функцию;
(c) $f_\lambda=e_{\lambda_1^t}\ldots e_{\lambda_k^t}$;
(d) $f_\lambda=h_{\lambda_1^t}\ldots h_{\lambda_k^t}$, где h_r обозначает r-ую полную симметрическую функцию;
(e)* $f_\lambda=h_{\lambda_1}\ldots h_{\lambda_k}$;
(f) $f_\lambda=p_{\lambda_1^t}\ldots p_{\lambda_k^t}$ где p_r обозначает r-ую сумму Ньютона;
(g)* $f_\lambda=p_{\lambda_1}\ldots p_{\lambda_k}$?

Указание: Вспомните выведенные на лекциях соотношения между производящими функциями, связывающие элементарные симметрические функции, полные симметрические функции и суммы Ньютона.

Задача 8. Какие из базисов предыдущей задачи являются образующими абелевой группы целочисленных симметрических многочленов степени n от k переменных?

Задача 9. Пусть $x_1,\ldots,x_n$ – корни многочлена $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$. Напишите выражение для элементарных симметрических функций от $x_2,\ldots,x_n$ через x_1 и коэффициенты многочлена $f(x)$.