Эпиморфизм $\mathrm{SU}_2 \to \mathrm{SO}_3$
Семинар 27

Обозначения. Через SU_2 обозначим группу унитарных матриц 2×2 с определителем 1. Напомним, что SO_3 — это группа (вещественных) ортогональных матриц 3×3.

Задача 1. Докажите, что всякая матрица из SU_2 имеет вид $\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$, где $|z|^2 + |w|^2 = 1$.

Задача 2. Докажите, что всякий элемент из группы SO_3 есть вращение ℓ_φ вокруг некоторой оси ℓ на некоторый угол φ.

Задача 3. *(Теорема Эйлера).* Зафиксируем в $\mathbb{R}^3$ ортонормированный репер $Oxyz$. Докажите, что любое вращение ℓ_φ есть композиция $Z_\gamma X_\beta Z_\alpha$ вращений вокруг Oz, Ox, Oz на углы α, β, γ соответственно.

Задача 4. Покажите, что эрмитовы матрицы со следом нуль образуют трёхмерное векторное пространство V над $\mathbb{R}$, форма $(X, Y) = \operatorname{tr} XY$ задаёт на нём структуру евклидова пространства, а матрицы Паули $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ образуют в V ортогональный базис.

Задача 5. Для любого элемента $u \in U_2$ определено отображение $R_u \colon V \to V$, $R_u(X) = uXu^{-1}$. Покажите, что R_u — ортогональный оператор, а соответствите $u \to R_u$ задаёт гомоморфизм $R \colon U_2 \to O_3$.

Задача 6. Пусть $u_\varphi = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$, $v_\psi = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\psi} \\ e^{-i\psi} & 0 \end{pmatrix}$. Проверьте, что $R_{u_{\varphi/2}} = X_\varphi$, $R_{v_{\psi/2}} = Z_\psi$. Выведите отсюда, что при гомоморфизме R каждый элемент из SO_3 имеет прообраз из SU_2.

Задача 7. Покажите, что при гомоморфизме R группа SU_2 отображается в точности на SO_3, и опишите ядро этого гомоморфизма.