

# Эрмитовы пространства

## Семинар 26

**Задача 1.** Приведите следующую эрмитову квадратичную форму к главным осям:

$$5|x_1|^2 + 6|x_2|^2 - i\sqrt{3}\overline{x_1}x_2 + i\sqrt{3}\overline{x_2}x_1.$$

**Задача 2.** Найдите положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной формы  $q(x) = \operatorname{tr} \overline{x}x$  при  $x \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$ .

**Задача 3.** Докажите, что если  $v \in V$  — собственный вектор операторов  $A$  и  $A^*$  в эрмитовом пространстве с собственными значениями  $\lambda$  и  $\mu$ , то  $\overline{\lambda} = \mu$ .

**Задача 4.** Найдите собственный ортонормированный базис и матрицу в этом базисе эрмитова оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 - i \\ 2 + i & 7 \end{pmatrix}$$

**Задача 5.** Найдите собственный ортонормированный базис и матрицу в этом базисе унитарного оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

$$(a) \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}; \quad (b) \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 + i & 1 \\ -1 & 1 - i \end{pmatrix}.$$

**Задача 6.** Докажите, что унитарная матрица размера  $2 \times 2$  с определителем, равным 1, подобна вещественной ортогональной матрице.

**Задача 7.** Пусть  $A$  — нильпотентный нормальный оператор в эрмитовом пространстве. Докажите, что  $A = 0$ .