Симметрические, ортогональные, нормальные операторы

Семинар 25

Задача 1. Убедитесь, что одна из этих двух форм является положительно определенной; найдите невырожденное линейное преобразование, приводящее эту форму к нормальному виду (т.е. с единичной матрицей), а вторую — к диагональному виду:

$$f(x) = x^2 + 10xy + 26y^2; \qquad g(x) = x^2 + 16xy + 56y^2.$$

Задача 2. Найдите канонический вид ортогональной матрицы и ортонормированный базис, в котором матрица имеет такой вид.

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Докажите, что оператор, заданный в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

является положительным симметрическим, и найдите такой положительный симметрический оператор B, что $A = B^2$.

Задача 4. Представьте в виде произведения положительного самосопряженного и ортогонального операторов оператор, заданный в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(такое представление называется *полярным разложением* оператора A).

Задача 5. Докажите, что симметрический оператор положителен тогда и только тогда, когда все коэффициенты его характеристического полинома отличны от нуля и имеют чередующиеся знаки.

Задача 6. Напомним, что оператор A называется *нормальным*, если $AA^* = A^*A$. Докажите, что нормальный оператор в двумерном евклидовом пространстве либо имеет ортонормированный собственный базис, либо представляет собой композицию поворота и гомотетии.

Задача 7. Пусть A — симметрический оператор. Докажите, что оператор

$$\exp(A) = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

положительный симметрический.

Задача 8. **(a)** Пусть A и B — коммутирующие операторы. Докажите, что

$$\exp(A + B) = \exp A \cdot \exp B.$$

(b) Пусть A — кососимметрический оператор. Докажите, что оператор $\exp A$ ортогонален.