

Билинейные формы

Семинар 24

Задача 1. При каких значениях λ является положительно определенной квадратичная форма

$$x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + 4x_2 x_3?$$

Задача 2. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами:

(а) $\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$

(б) $\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$

(с) $\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 = 0, \Delta_7 > 0?$

Если да, то какая у нее может быть сигнатура?

Задача 3. Может ли невырожденная квадратичная форма на двумерном вещественном пространстве иметь: (а) ровно одно; (б) ровно два; (с) ровно три изотропных подпространства? Тот же вопрос, если форма не обязательно невырождена.

Замечание. Нулевое подпространство не считается изотропным.

Задача 4. Убедитесь, что отображение $\text{Mat}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \det A$, является квадратичной формой на (четырёхмерном) векторном пространстве матриц. Найдите сигнатуру этой формы и явно опишите ее поляризацию.

Задача 5. Докажите, что отображение $\text{Mat}_n(\mathbb{R}) \times \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \text{tr} AB$, является билинейной формой, и найдите ее сигнатуру. (Если общий случай вызывает затруднения, начните с $n = 2, 3, 4$).

Задача 6. Найдите ортогональное дополнение к подпространству симметрических матриц относительно формы из предыдущей задачи.