

**Инвариантные подпространства и централизаторы**  
Семинар 23

**Задача 1.** Найдите жорданову форму для квадрата жордановой клетки с собственным значением  $\lambda$  при:  
(a)  $\lambda = 0$ ;    (b)  $\lambda \neq 0$ .

**Задача 2.** Диагонализуем ли оператор, удовлетворяющий уравнению  $A^3 - 6A^2 + 11A - 6E = 0$ ?

**Задача 3.** Опишите все матрицы, перестановочные с:

- (a) диагональной матрицей  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_k)$ , где все  $\lambda_i$  различны;
- (b) жордановой клеткой с собственным значением  $\lambda$ ;
- (c) матрицей из двух жордановых блоков с различными собственными значениями  $\lambda, \mu$ ;
- (d) матрицей из двух жордановых блоков с собственным значением  $\lambda$ ;
- (e) произвольной матрицей, приведённой к жордановой нормальной форме. В каждом из случаев найдите размерность пространства таких матриц.

**Задача 4.** Опишите все подпространства в  $\mathbb{C}^3$ , инвариантные относительно оператора с матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Задача 5.** Найдите все подпространства в:    (a)  $\mathbb{C}^3$ ;    (b)  $\mathbb{Q}^3$ , одновременно инвариантные для пары операторов с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Задача 6.** На комплексном векторном пространстве действует оператор  $A$ . Покажите, что оператор  $B$ , перестановочный с любым оператором, перестановочным с  $A$ , является многочленом от  $A$ .