Фробениусова нормальная форма и вокруг

Семинар 22

Задача 1. Существует ли матрица, характеристический и минимальный многочлен которой равны соответственно:

(a) $\chi_A(t) = t^6 - 1$, $\mu_A(t) = t^3 - 1$;

(b) $\chi_A(t) = (t-1)^5(t-2)^3$; $\mu_A(t) = (t-1)^3(t-2)^2$?

Задача 2. Приведите эти матрицы к фробениусовой нормальной форме над $\mathbb{Q}$ и выясните, подобны ли они (т.е. получаются ли они друг из друга заменой базиса):

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 14 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; **(b)** $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 85 \\ 1 & 4 & -30 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; **(c)** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 3. **(a)** Докажите, что две матрицы размера 3×3 получаются друг из друга заменой базиса тогда и только тогда, когда у них совпадают характеристические многочлены и совпадают минимальные многочлены.

(b) Верно ли это для матриц 4×4? Докажите или приведите контрпример.

Задача 4. Выясните, являются ли следующие матрицы диагонализируемыми, то есть подобными диагональным матрицам в полях рациональных, вещественных и комплексных чисел:

(a) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$; **(b)** $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$.

Задача 5. Как может выглядеть фробениусова нормальная форма идемпотентной матрицы? Напомним, что идемпотентной называется матрица A, удовлетворяющая равенству $A^2 = A$.

Задача 6. Докажите, что если хотя бы одна из двух матриц A, B невырождена, то матрицы AB и BA имеют одинаковую фробениусову нормальную форму. Приведите пример двух вырожденных матриц A и B, для которых матрицы AB и BA будут иметь различную фробениусову нормальную форму.

Задача 7. Перечислите с точностью до замены базиса все матрицы размера 6×6 с коэффициентами из $\mathbb{Q}$ с минимальным многочленом $(t+2)^2(t-1)$.

Задача 8. Перечислите с точностью до замены базиса все матрицы размера 6×6 с коэффициентами из $\mathbb{C}$ с характеристическим многочленом $(t^4-1)(t^2-1)$.

Задача 9. Опишите все возможные фробениусовы нормальные формы оператора с коэффициентами из $\mathbb{Q}$, характеристический многочлен которого равен $t^2(t^2+1)^2$.

Задача 10. Докажите, что не бывает матриц размера 3×3 с коэффициентами из $\mathbb{Q}$, для которых $A^8 = E$, но $A^4 \neq E$.

Задача 11. Найдите с точностью до замены базиса все матрицы размера 2×2, порядок которых по умножению равен 4, с коэффициентами из: **(a)** $\mathbb{Q}$; **(b)** $\mathbb{C}$.