Жорданова нормальная форма

Семинар 21

Везде, где это не указано явно, основным полем следует считать поле комплексных чисел; через V обозначено векторное пространство размерности n.

Задача 1. Найдите жорданову нормальную форму для оператора, заданного матрицей

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; **(b)** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Найдите жорданову нормальную форму и жорданов базис для оператора, заданного матрицей

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$; **(b)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 3. **(a)** Найдите жорданову нормальную форму оператора в конечномерном комплексном пространстве, имеющего лишь одну инвариантную прямую.

(b) Докажите, что максимальное число линейно независимых собственных векторов с собственным значением λ линейного оператора $\mathcal{A}$ равно числу жордановых клеток с диагональным элементом λ в жордановой нормальной форме оператора $\mathcal{A}$.

Задача 4. В пространстве комплексных полиномов от переменных x, y степени не выше n действует оператор $\partial/\partial x + \partial/\partial y$. Найдите жорданову нормальную форму этого оператора.

Задача 5. Пусть A — жорданова клетка с элементом λ на главной диагонали. Вычислите следующие матрицы:

(a) A^{-1}; **(b)** A^2; **(c)** A^3; **(d)** $\exp A = \sum_{n\geqslant 0} A^n/n!$; **(e)** $\sin A = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n A^{2n+1}/(2n+1)!$.

Задача 6. Решите предыдущую задачу для случая, когда матрица A состоит из нескольких жордановых блоков.

Задача 7. Вычислите $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{50}$.