Нильпотентные операторы
Семинар 20

Везде, где это не указано явно, основным полем следует считать поле комплексных чисел; через V обозначено векторное пространство размерности n.

Определение. Линейный оператор $\mathcal{A}\colon V \to V$ называется *нильпотентным*, если $\mathcal{A}^N = 0$ для некоторого N.

Задача 1. Чему могут быть равны собственные значения нильпотентного оператора?

Задача 2. **(a)** Пусть $m_k = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^k$. Докажите, что $m_1 < m_2 < \dots < m_N = n$. Что можно сказать о взаимном расположении подпространств $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^k$?

(b) Докажите, что $N \leqslant \dim V$.

Задача 3. Рассмотрим пространства $\operatorname{Im} \mathcal{A}^k$. Что можно сказать об их взаимном расположении? Выразите их размерности через $m_1, m_2, \dots$.

Задача 4. Предположим, что $m_k = k$. Докажите, что существует такой базис $e_1, \dots, e_n$, для которого $\mathcal{A}e_1 = 0$ и $\mathcal{A}e_k = e_{k-1}$ (он называется *жордановым базисом*). Выпишите матрицу оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Полученная матрица называется *жордановой клеткой порядка n*.

Задача 5. Пусть теперь m_k произвольны. Докажите, что V раскладывается в прямую сумму подпространств V_i, инвариантных относительно $\mathcal{A}$, для которых ограничение $\mathcal{A}$ на каждое из V_i записывается в подходящем базисе как жорданова клетка. Чему равно число этих подпространств? Как найти их размерности, зная m_k?

Полученный в предыдущей задаче базис также называется *жордановым базисом* для оператора $\mathcal{A}$. Матрица, которой он записывается в этом базисе, называется его *жордановой нормальной формой*.

Задача 6. Найдите жорданов базис и жорданову нормальную форму операторов, заданных следующими матрицами:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$; **(b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & -7 \\ -1 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; **(c)** $\begin{pmatrix} -2 & 4 & -5 & -7 \\ -1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; **(d)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$;

(e) оператора $f(x) \mapsto f'(x)$, заданного на пространстве многочленов степени не выше n;
(f) оператора $f(x) \mapsto f^k(x)$, заданного на пространстве многочленов степени не выше n.