

Поля и Линейные Уравнения Семинар 1.

Предлагается обсудить задачи на такие темы:
Поле, как множество коэффициентов, где решаются линейные уравнения.
Примеры полей и вычисления в них: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$.

Задача 1. Решите линейное уравнение $4x = 1$ для $x \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.
 $(\sqrt{3} + 1)x - 5 = 0$ для $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$

Задача 2. Решите линейное уравнение $3x + 6y = 5$ над $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.
То есть опишите множество решений любым удобным вам способом.

Задача 3*. Решите линейное уравнение $30x + 28y + 31z = 365$ над $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$.

Задача 4. Докажите, что у всех элементов в $\mathbb{Q}[\sqrt{3}], \mathbb{C}$ есть обратный, а значит соответствующее множество образует поле. Опишите конструктивный способ вычисления обратного.

Далее в качестве поля рассматривается \mathbb{C}

Задача 5. Докажите, что $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Задача 6. Вычислите вещественную и мнимую части у выражений

$$\frac{i-4}{2i-3}, \quad (i^5 + i + 1), \quad (3 + 3i)^8, \quad \frac{1+i}{1-i} - (1+2i)(2+2i) + \frac{3-i}{1+i}, \quad (\sqrt{3} + i)(1 + \sqrt{3}i).$$

Задача 7. Вычислите (a) $\frac{(5+i)(3+5i)}{2i}$ (b) $\frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$ (c) $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$

Задача 8. Разобрать тригонометрическую запись числа. Доказать формулу Муавра:

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

Задача 9. Вычислите для всех $n \in \mathbb{Z}$ $(1+i)^n$, $\left(\frac{1+i \operatorname{tg} \varphi}{1-i \operatorname{tg} \varphi}\right)^n$, $(1 + \cos \varphi + i \sin \varphi)^n$.

Задача 10. Представьте в виде многочленов от $\sin(x)$ и $\cos(x)$ функции $\sin(4x)$, $\cos(4x)$.

Задача 11. Докажите равенства

$$\cos(nx) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k} x \sin^{2k} x;$$
$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

Задача 12. Опишите множество квадратных корней из $-1 - i$.

Задача 13. Опишите множество кубических корней из -8 .

Задача 14. Вычислите сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2i}{3}\right)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

Задача 15. Опишите все комплексные числа z , для которых $|z| - z = i$.

Задача 16. Опишите комплексные числа $z \in \mathbb{C}$, такие что (a) $\operatorname{Re}(z(1+i) + z\bar{z}) = 0$, (b) $\operatorname{Re}(z^2 + i\operatorname{Im}(\bar{z}(1+2i))) = -3$, (c) $\operatorname{Im}((2-i)z) = 1$.

Задача 17. Докажите, что для любого комплексного числа z множество значений выражений $\{a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ образует поле.