Собственные и корневые подпространства
Семинар 19

Везде, где это не указано явно, основным полем следует считать поле комплексных чисел.

Задача 1. Найдите собственные и корневые подпространства операторов, заданных матрицами:

(a) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$; **(b)** $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$; **(c)** $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Замечание. Это те же самые операторы, которые были в предыдущем листке.

Задача 2. Найдите собственные и корневые подпространства оператора $A\colon \mathbb{C}[x]_n \to \mathbb{C}[x]_n$:
(a) $A(f(x)) = f'(x)$;
(b) $A(f(x)) = f^{(k)}(x)$;
(c) $A(f(x)) = xf'(x)$.

Задача 3. Докажите, что линейный оператор в конечномерном пространстве записывается диагональной матрицей тогда и только тогда, когда все его корневые векторы являются собственными.

Задача 4. Докажите, что размерность собственного пространства оператора A, отвечающего собственному значению λ, не превосходит кратности λ как корня характеристического многочлена оператора A.

Задача 5. Докажите, что комплексное векторное пространство, содержащее только одну прямую, инвариантную относительно оператора A, не раскладывается в пряую сумму A-инвариантных подпространств.

Задача 6. Пусть $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — линейный оператор. Рассмотрим отображение L_A из пространства матриц $n \times m$ в себя, заданное правилом $L_A(X) = AX$.

(a) Докажите, что это линейный оператор на пространстве $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{C})$, найдите собственные значения $L_A(X)$.

(b) Пусть A задан верхнетреугольной матрицей. Опишите корневые подпространства оператора L_A.

Задача 7. Пусть два оператора A и B на конечномерном векторном пространстве V таковы, что $A^2 = B^2 = E$. Докажите, что в V существует одномерное или двумерное векторное подпространство, инвариантное относительно A и B.