

Собственные векторы и собственные значения

Семинар 18

Везде, где это не указано явно, основным полем следует считать поле комплексных чисел.

Задача 1. Найдите собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ (a) над \mathbb{R} ; (b) над \mathbb{C} .

Задача 2. Найдите собственные значения и собственные векторы операторов, заданных матрицами:

$$(a) \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}; \quad (b) \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}; \quad (c) \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Выразите след и определитель матрицы через корни ее характеристического многочлена.

Задача 4. Выразите коэффициенты характеристического многочлена матрицы размера $n \times n$ через коэффициенты самой матрицы, если: (a) $n = 2$; (b) $n = 3$; (c) n произвольно.

Задача 5. Характеристический многочлен оператора равен $(t - a)^2$. Докажите, что в некотором базисе этот оператор записывается матрицей вида $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Задача 6. Найдите все собственные значения и собственные векторы оператора $A: \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x]$, если:

- (a) $A(f(x)) = f'(x)$;
- (b) $A(f(x)) = f^{(n)}(x)$;
- (c) $A(f(x)) = xf'(x)$;
- (d) $A(f(x)) = \int_0^x f(t)dt$;
- (e) $A(f(x)) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$.

Задача 7. Найдите все подпространства, инвариантные относительно действия оператора $A: \mathbb{C}[x]_n \rightarrow \mathbb{C}[x]_n$ (действующего на многочленах степени не выше n) для оператора

- (a) $A(f(x)) = f'(x)$;
- (b) $A(f(x)) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$.

Задача 8. Докажите, что если все собственные значения матрицы A равны нулю, то она нильпотентна (т.е. $A^N = 0$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$). Придумайте оценку сверху на N .

Задача 9. (a) Докажите, что всякая вещественная матрица на нечетномерном пространстве имеет хотя бы одно вещественное собственное значение.

(b) Докажите, что все собственные значения вещественной симметрической матрицы размера 2×2 являются неотрицательными вещественными числами.

Задача 10. Докажите, что в n -мерном комплексном векторном пространстве всякий оператор имеет инвариантное подпространство размерности $n - 1$.