

Абелевы группы

Семинар 16

Задача 1. Какие из этих групп изоморфны:

(a) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$, \mathbb{Z}_8 ?

(b) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{18}$, \mathbb{Z}_{36} ?

Задача 2. Пусть $L \subset \mathbb{Z}^n$ — решётка полного ранга (т.е. подгруппа, ранг которой равен n), e_1, \dots, e_n — базис в L . Докажите, что объём параллелепипеда, натянутого на e_1, \dots, e_n , не зависит от выбора базиса в L . Чему он равен?

Задача 3. Разложите в прямую сумму циклических групп факторгруппу A/B , где A — свободная абелева группа с базисом x_1, x_2, x_3 , а B — ее подгруппа, порожденная элементами y_1, y_2, y_3 :

(a)

$$\begin{cases} y_1 = 5x_1 + 5x_2 + 2x_3; \\ y_2 = 11x_1 + 8x_2 + 5x_3; \\ y_3 = 17x_1 + 5x_2 + 8x_3. \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 6x_2 - 2x_3; \\ y_2 = 2x_1 + 8x_2 - 4x_3; \\ y_3 = 4x_1 + 12x_2 - 2x_3. \end{cases}$$

Задача 4. Найдите взаимные базисы и каноническое разложение фактора решетки \mathbb{Z}^3 по подрешетке, порожденной векторами $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$ и $(7, 8, 9)$.

Задача 5. Найдите в абелевой группе с образующими a, b, c и соотношениями

$$2a + b - 50c = 4a + 5b + 60c = 0,$$

порядок элемента $32a + 31b$.

Задача 6. Сколько элементов порядков 3 и 6 в неабелевой группе порядка 18?

Задача 7. Есть ли в абелевой группе $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{16}$ подгруппа, изоморфная:

(a) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8$; (b) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$; (c) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$?

Задача 8. (a) Пусть порядок конечной абелевой группы G делится на число m . Докажите, что в G есть подгруппа порядка m .

(b)* Верно ли это для неабелевых групп?

Задача 9. Докажите, что аддитивные группы \mathbb{Z} и \mathbb{Q} не разлагаются в прямую сумму ненулевых подгрупп.

Задача 10. Докажите, что при $n \geq 3$ группа обратимых элементов кольца \mathbb{Z}_{2^n} изоморфна $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2^{n-2}}$.