Евклидовы кольца
Семинар 15

Задача 1. Найдите НОД следующих двух элементов и его линейное выражение:
(a) $x^4 - 4x^3 + 1$ и $x^3 - 3x^2 + 1$ в $\mathbb{R}[x]$;
(b) $41 + 23i$ и $19 + 5i$ в $\mathbb{Z}[i]$.

Задача 2. Найдите НОД многочленов $x^m - 1$ и $x^n - 1$ (m, n — натуральные числа).

Задача 3. Докажите, что если целое вещественное число кратно ненулевому целому гауссовому числу $a + bi$, то оно кратно $(a^2 + b^2)/\text{НОД}(a, b)$.

Задача 4. **(a)** Найдите все обратимые гауссовы числа (т.е. такие $z \in \mathbb{Z}[i]$, для которых $z^{-1} \in \mathbb{Z}[i]$). Чему равняется их норма?
(b) Разложите числа 2, 3, 5 и 7 в произведение простых (т.е. не раскладывающихся в произведение необратимых множителей) гауссовых чисел.

Задача 5. Сформулируйте и докажите китайскую теорему об остатках **(a)** для кольца $\mathbb{R}[x]$;
(b) для произвольного евклидова кольца.

Задача 6. Изоморфны ли следующие кольца? Какие из этих колец являются полями?
(a) $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$; **(b)** $\mathbb{R}[x]/(x^2)$; **(c)** $\mathbb{R}[x]/(x^2 - 1)$; **(d)** $\mathbb{R}[x]/(x^2 + px + q)$, где $p, q \in \mathbb{R}$.

Задача 7. Найдите количество элементов в кольцах и выясните, изоморфны ли эти кольца:
(a) $\mathbb{F}_3[x]/(x^2 + x + 1)$; **(b)** $\mathbb{F}_3[x]/(x^2 + x + 2)$.

Задача 8. **(a)** При каких n многочлен $x^n - 2$ неприводим над полем $\mathbb{Q}$?
(b) Докажите *признак Эйзенштейна*: если все коэффициенты a_i многочлена $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ с целыми коэффициентами делятся на простое число p, причем a_0 не делится на p^2, то этот многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$.

Задача 9. Докажите, что многочлен $x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1$ неприводим над $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда $n + 1$ — простое число.
Указание. Полезно сделать замену $x \to x + 1$.

Задача 10. Докажите, что многочлен $x^p - x + a$ неприводим над $\mathbb{F}_p$ при $a \neq 0$
Указание. Всё-таки полезно сделать замену $x \to x + 1$.

Задача 11. Пусть A — кольцо без делителей нуля. Рассмотрим множество пар $(x, y) \in A$, $y \neq 0$, и отфакторизуем его по отношению эквивалентности: $(x, y) \cong (x', y')$, если $xy' = x'y$. Полученное фактормножество назовем R. Определим сложение и умножение элементов из R по правилу: $(x, y) + (x', y') = (xy' + x'y, yy')$; $(x, y)(x', y') = (xx', yy')$. Докажите, что R является полем. Оно называется *полем частных* кольца A.

Задача 12. **(a)** Покажите, что кольцо $\mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ не имеет делителей нуля.
(b) Докажите, что кольцо $\mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ не изоморфно $\mathbb{C}[x]$, но его поле частных изоморфно полю рациональных функций $\mathbb{C}(x)$.
Указание. Синус и косинус рационально выражаются через тангенс половинного угла.