Группы, образующие и соотношения, универсальность.
Семинар 13.

Задача 1. Докажите, что любая подгруппа абелевой группы нормальна.

Задача 2. Докажите, что факторгруппа некоммутативной группы по своему центру не может быть циклической.

Задача 3. Докажите, что факторгруппа свободной группы по своему коммутанту является свободной абелевой группой.

Задача 4. Пусть группа $G = \langle S|D \rangle$ – группа, заданная набором образующих S и набором соотношений D. Тогда слово w в алфавите S равно единице в группе G тогда и только тогда, когда w, рассматриваемое как элемент свободной группы F_S, порожденной S, представляется в виде $u_1 r_1^{\epsilon_1} u_1^{-1} u_2 r_2^{\epsilon_2} u_2^{-1} \dots u_k r_k^{\epsilon_k} u_k^{-1}$, где $u_i \in F_S$, $r_i \in D$, $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$.

Задача 5.

(a) Докажите, что для любой пары групп G_1, G_2 существует группа G (называемая прямым произведением) и пара гомоморфизмов $G_1 \xleftarrow{i_1} G \xrightarrow{i_2} G_2$ универсальных в следующем смысле: Для любого набора (группа D, $j_1 : D \to G_1$, $j_2 : D \to G_2$) существует единственное отображение $\varphi : D \to G$, для которого следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "j_1"'] \arrow[d, dashed, "\exists!"] \arrow[dr, "j_2"] & \\ G_1 & G \arrow[l, "i_1"'] \arrow[r, "i_2"] & G_2. \end{tikzcd}$$

Опишите группу G образующими и соотношения, использую образующие и соотношения для групп G_1 и G_2.

(b) Переверните все стрелки в диаграмме из предыдущего пункта и дайте определение свободного произведения групп универсальным способом и через образующие и соотношения.

(c) Попробуйте дать определение универсальной группы (по аналогии с произведением групп) отображающейся в диаграмму $G_1 \to G_2 \leftarrow G_3$. Вычислите эту группу для диаграммы $\mathbb{Z}_{10} \xrightarrow{\times 5} \mathbb{Z}_2 \xleftarrow{\times 7} \mathbb{Z}_{14}$.

(d) Верно ли, что прямое произведение (свободное произведение) (свободных) абелевых (конечных) групп является (свободной) абелевой (соотв. конечной) группой.

(e) Может ли группа перестановок быть свободным или прямым произведением двух нетривиальных групп.

Задача 6. Докажите, что если числа m, n взаимно просты, то прямое произведение циклических групп порядка m и n является циклической группой. Верно ли обратное?

Задача 7*. Пусть G – группа и S – подмножество в группе. Докажите, что группа G свободно порождена набором S тогда и только тогда, когда выполнены два следующих условия:

(a) S порождает G,

(b) Если w – слово в алфавите S и $w =_G e$, то w редуцируемо, то есть w содержит обратимую пару ss^{-1}.