Группы, классы смежности, задание образующими и соотношениями.
Семинар 12.

Задача 1. Докажите, что если фигура S имеет несобственные симметрии, то количество собственных и несобственных симметрий S одинаково.

Задача 2. Найдите левые смежные классы группы G по подгруппе H, выясните нормальна ли подгруппа H, если нормальна, то опишите факторгруппу:

(a) G – аддитивная группа $\mathbb{Z}$, H – подгруппа $n\mathbb{Z}$ целых чисел, делящихся на n;

(b) G – циклическая группа порядка 12, H – подгруппа, порожденная 10-ой степенью образующей;

(c) G – группа перестановок S_n, H – стационарная подгруппа элемента n;

(d) G – аддитивная группа $\mathbb{R}$, H – подгруппа целых чисел;

(e) G – мультипликативная группа $\mathbb{C}^*$, H – подгруппа U чисел с модулем 1;

(f) G – мультипликативная группа $\mathbb{C}^*$, H – подгруппа $\mathbb{R}^*$ обратимых вещественных чисел.

Задача 3. Пусть H – подгруппа конечной группы G, $a \in G$. Доказать, что

(a) отображение $\sigma_a : gH \mapsto agH$ есть перестановка на множестве классов смежности G/H;

(b) отображение $f : a \mapsto \sigma_a$ определяет действие группы G на G/H, в частности, f задает гомоморфизм G в симметрическую группу.

(c) σ_a является тождественной перестановкой в том и только в том случае, когда a принадлежит пересечению всех подгрупп, сопряженных с H.

(d) Пусть H подгруппа в конечной группе G индекса p. Докажите, что если p – минимальный простой делитель порядка G, то группа H нормальна.

Задача 4. Опишите нормальные подгруппы и факторгруппы группы диэдра D_n для $n = 4, 5, 6, 7$.

Задача 5. В группе (собственных) движений плоскости нормальна ли подгруппа поворотов вокруг заданной точки; подгруппа параллельных переносов? Если нормальна, то опишите факторгруппу.

Задача 6. Опишите группу диэдра через образующие и соотношения, выбрав в качестве образующих две симметрии относительно соседних прямых.

Задача 7. Опишите гомоморфизмы между группами диэдра D_4 и D_6.

Задача 8. Опишите гомоморфизмы между группой диэдра D_p и группой четных перестановок A_p для простого числа p.

Задача 9. Вычислите порядки образующих в группе $G = \langle a, b | a^{-1}ba = b^2, b^{-1}ab = a^2 \rangle$.

Задача 10. Докажите, что группа $G = \langle a, b | ababa^{-1} = 1 \rangle$ изоморфна бесконечной циклической группе.

Задача 11. Пусть выбраны две конечные группы G, H и с каждым элементом группы g ассоциирован гомоморфизм $\varphi_g : H \to H$. Определим группу $(G \ltimes_\varphi H, \star)$ как группу, порожденную элементами из G и из H и набором соотношений:

$$\forall g_1, g_2 \in G \text{ имеем } g_1 \star g_2 = g_1 \cdot_G g_2 \qquad \forall h_1, h_2 \in H \text{ имеем } h_1 \star h_2 = h_1 \cdot_H h_2$$
$$\forall g \in G, h \in H \text{ имеем } h \star g = g \star \varphi_g(h)$$

(a) Докажите, что группа $G \ltimes_\varphi H$ конечна и её порядок не превосходит произведения порядков групп G и H.

(b) Докажите, что равенство достигается в том и только в том случае, когда соответствие φ является гомоморфизмом группы G в группу автоморфизмов группы H. В данной ситуации группа $G \ltimes_\varphi H$ называется полупрямым произведением групп G и H.

(c) Докажите, что H будет нормальной подгруппой в группе $G \ltimes_\varphi H$, а в свою очередь G может не быть нормальной подгруппой.

(d) Приведите пример некоммутативной группы порядка 21, представьте её в виде полупрямого произведения $\mathbb{Z}_3 \ltimes \mathbb{Z}_7$.

(e) Приведите пример некоммутативной группы порядка p^3, являющейся полупрямым произведением $\mathbb{Z}_p \ltimes \mathbb{Z}_{p^2}$.