Группы, действие
Семинар 11.

Задача 1. Какие из следующих групп изоморфны:
(a) $SL_2(\mathbb{F}_3)$, **(b)** S_4 **(c)** A_5 **(d)** группа движений куба.

Задача 2.
(a) Докажите, что поточечное умножение задает структуру группы на множестве отображений $Maps(X, G)$ из множества X в группу G.

(b) Докажите, что если группа G конечна, а подмножество $S \subset Maps(X, G)$ замкнуто относительно умножения, то S – это подгруппа.

(c) Верно ли, что множество гомоморфизмов групп из группы $(\mathbb{Z}, +)$ в заданную конечную группу G является группой, изоморфной G.

Задача 3. Верно ли, что любая подгруппа циклической группы – циклическая?

Задача 4. Для каких m, n существует нетривиальное отображение из циклической группы порядка m в циклическую группу порядка n? Сколько их?

Задача 5. Найти все орбиты группы G невырожденных линейных операторов, действующих на n-мерном векторном пространстве V, если
(a) G – группа всех невырожденных линейных операторов;
(b) G – группа ортогональных операторов;
(c) G – группа операторов, матрицы которых в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$ диагональные;
(d) G – группа операторов, матрицы которых в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$ верхнетреугольные.

Задача 6. Назовём цикловым типом перестановки $\sigma \in S_n$ набор мощностей орбит её действия на множестве $\{1, \ldots, n\}$.

(a) Пусть σ – перестановка с цикловым типом $\rho := \{\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \ldots \rho_k\}$. Докажите, что существует перестановка τ такая, что перестановка $\tau\sigma\tau^{-1}$ имеет орбиты $\{1, \ldots, \rho_1\}$, $\{\rho_1 + 1, \ldots, \rho_1 + \rho_2\}$,....
(b) Докажите, что знак перестановки с цикловым типом ρ равен $\sum_{i=1}^{k}(\rho_i - 1)$.
(c) Найдите порядок перестановки с цикловым типом ρ.
(d) Докажите, что группа перестановок S_n порождается транспозицией и циклом максимальной длины.

Задача 7. Вычислите стабилизатор и размерность орбиты действия группы перестановок на наборах непересекающихся подмножеств множества $\{1, \ldots, n\}$ мощностей $2, 2, 3$.

Задача 8. Найдите порядки всевозможных стабилизаторов и орбит действия группы $\mathsf{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ на множестве
(a) векторных подпространств в $\mathbb{F}_q^n$;
(b) наборов линейно независимых векторов;
(c) пар вложенных подпространств.

Задача 9. Пусть U_p —- множество комплексных корней из единицы, порядок которых есть степень простого числа p. Докажите, что
(a) U_p – это группа;
(b) любой гомоморфизм этой группы в конечную группу тривиальный;
(c) любая собственная подгруппа этой группы – циклическая.

Задача 10. Опишите группу автоморфизмов групп $\mathbb{Z}_n$ для $n = 2, \ldots, 7$.