Группы Семинар 10.

Задача 1. Докажите, что поле (кольцо) является абелевой группой по сложению, а множество обратимых элементов в поле (кольце) является группой по умножению. В свою очередь, векторное пространство является абелевой группой по сложению.

Задача 2. **(a)** Докажите, что множество линейных преобразований векторного пространства V, сохраняющих фигуру $S \subset V$, образует группу, которую мы будем обозначать $Aut(S)$. **(b)** Тот же вопрос, если рассматривать изометрии (преобразования, сохраняющие расстояние), соответствующая группа будет называться $Iso(S)$. **(c)** Существует ли фигура S, лежащая в собственном векторном подпространстве, такая, что её группа линейных преобразований (изометрий) конечна?

Задача 3. Рассмотрим векторное пространство V с выделенным базисом $e_1, \dots, e_n$.

(a) Опишите группу линейных преобразований, которые сохраняют данный базис как множество.

(b) Опишите группу линейных преобразований, сохраняющих координатный крест (объединение базисных прямых). Сколько в ней элементов, если V – векторное пространство над $\mathbb{F}_q$?

Задача 4.

(a) Предъявите взаимно-однозначное соответствие между аффинными преобразованиями n-мерного аффинного пространства и линейными преобразованиями $n+1$-мерного пространства, сохраняющими фиксированный вектор.

(b) Используя произведение матриц, покажите, что любое аффинное преобразование представляется однозначным образом в виде линейного преобразования и параллельного переноса.

(c) Опишите множество левых (правых) смежных классов группы аффинных преобразований по подгруппе преобразований, сохраняющих фиксированную точку (прямую). Выберите по конкретному представителю в каждом классе смежности.

Задача 5. Пусть p – простое число.

(a) Докажите, что группа порядка p единственна и изоморфна группе остатков по модулю p с операцией сложения.

(b) Рассмотрим векторное пространство $\mathbb{F}_p^n$ над полем из p элементов как группу по сложению. Докажите, что любая его подгруппа является векторным подпространством.

(c) Пусть в конечной абелевой группе G порядок каждого элемента равен p. Верно ли, что G – векторное пространство над $\mathbb{F}_p$?

(d) Докажите, что отображение между векторными пространствами над $\mathbb{F}_p$ является линейным отображением, если и только если оно является отображением абелевых групп.

(e) Какие из предыдущих пунктов останутся верными, если p – степень простого числа?

Задача 6. Перечислите все элементы и их порядки для группы симметрий правильного

(a) треугольника;

(b) n-угольника (чётный и нечётный случай разобрать отдельно);

(c) куба.

Задача 7. Укажите такие 4 подмножества множества вершин куба, на которых группа симметрий куба действует перестановками.

Задача 8. Найдите порядок элемента $g^{-1}hg$, если порядки элементов g и h равны n и k соответственно.

Задача 9. Перестановка $\sigma \in S_{m+n}$ называется m-n–тасовкой, если она сохраняет порядок следования первых m элементов и последних n элементов.

(a) Вычислите количество m-n–тасовок.

(b) Докажите, что m-n–тасовки находятся во взаимно-однозначном соответствии с левыми смежными классами группы S_{m+n} по подгруппе $S_n \times S_m$.

(c) Найдите похожее описание представителей левых смежных классов группы S_{m+n+k} по подгруппе $S_m \times S_n \times S_k$.

Задача 10.

(a) Докажите, что множество квадратных целочисленных матриц порядка n с определителем ± 1 образует группу относительно операции умножения, называемую $\mathsf{GL}_n(\mathbb{Z})$.

(b) Используя элементарные преобразования, покажите, что $\mathsf{GL}_2(\mathbb{Z})$ порождена матрицами $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(c) Предъявите набор из 3 матриц, который порождает группу $\mathsf{GL}_n(\mathbb{Z})$.

Задача 11. Вычислите количество элементов в группах **(a)** $\mathsf{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, **(b)** $\mathsf{SL}_n(\mathbb{F}_q)$, **(c)** обратимых верхнетреугольных матриц, **(d)** матриц, оставляющих на месте тройку векторов.