

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
Задачи письменного экзамена
15 декабря 2014 г.

1. Пусть ковариантная производная в касательном расслоении удовлетворяет соотношению $\nabla_\xi \eta = \nabla_\eta \xi$ для всякой пары коммутирующих векторных полей. Докажите, что тогда для произвольной пары векторных полей u, v выполняется соотношение $\nabla_u v - \nabla_v u = [u, v]$.
2. Докажите, что метрика $e^{-2x}(y^2 dx^2 + dy^2)$ (в области $y > 0$ плоскости координат x, y) плоская. Найдите ковариантно постоянные 1-формы и евклидовы координаты.
3. Вычислите гауссову кривизну поверхности в \mathbb{R}^3 , полученной вращением кривой $z = f(x)$ вокруг оси Oz . При каких условиях она имеет постоянную кривизну -1 ? Приведите пример такой поверхности.
4. (Псевдо)риманова метрика и связность в касательном расслоении пространства \mathbb{R}^3 с координатами $x = u_1, y = u_2, z = u_3$ задаются в базисе координатных векторных полей соотношениями

$$(\partial_{u_i}, \partial_{u_j}) = \frac{\partial^3 F}{\partial u_1 \partial u_i \partial u_j}, \quad \Gamma_{ijk} = (\nabla_{\partial_{u_k}} \partial_{u_j}, \partial_{u_i}) = \frac{\partial^3 F}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k},$$

где

$$F(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 z + x y^2) + \frac{z y^3}{3!} + a \frac{z^3 y^2}{3!2!} + b \frac{z^7}{7!}.$$

При каких значениях параметров a и b связность плоская? При каких значениях она симметричная? При каких согласована с метрикой?