Дифференциальная геометрия
Листок 6
10 ноября 2014 г.

Пусть ∇ – связность в $T\mathbb{R}^n$, задаваемая покоординатным дифференцированием векторных полей, рассматриваемых как вектор-функции.

1. Для $n = 2$, найдите производную $\nabla_u v$, где $u = u^1\partial_\rho + u^2\partial_\varphi$ и $v = v^1\partial_\rho + v^2\partial_\varphi$, в полярных координатах на плоскости. Определите матрицу связности и символы Кристоффеля в этих координатах.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^3$ — поверхность. Определим связность в TM следующим образом: ковариантная производная векторного поля задается композицией его покоординатной производной как трехкомпонентной вектор-функции с последующей ортогональной проекцией на касательную плоскость.

2. Для случая, когда M — единичная сфера, найдите производную $\nabla_u v$ для $u = u^1\partial_\varphi + u^2\partial_\psi$, $v = v^1\partial_\varphi + v^2\partial_\psi$, в сферических координатах. Определите матрицу связности и символы Кристоффеля в этих координатах.

Пусть M — риманова поверхность. *Риманова связность* в TM задается формулами $\nabla_\xi e_1 = \alpha(\xi)\ e_2$, $\nabla_\xi e_2 = -\alpha(\xi)\ e_1$, где e_1 и e_2 — ортонормированный базис касательных векторных полей и α — 1-форма связности из алгоритма вычисления кривизны.

3. Определите матрицу связности и символы Кристоффеля римановой связности в координатах (x, y) для метрики $g = dx^2 + 2\cos\omega\, dx\, dy + dy^2$, где $\omega(x, y)$ — некоторая функция.

Связность ∇ в расслоении E определяет естественную связность ∇^* в двойственном расслоении E^* условием

$$\partial_\xi(u, s) = (\nabla^*_\xi u, s) + (u, \nabla_\xi s),$$

где u и s — сечения расслоений E^* и E соответственно. Аналогично, связности ∇^E и ∇^F в расслоениях E и F определяют связность в расслоении $E \otimes F$ условием

$$\nabla_\xi e\otimes f = (\nabla^E_\xi e) \otimes f + e \otimes (\nabla^F_\xi f).$$

4. Как связаны между собой матрицы связности в некотором расслоении и ассоциированной связности в двойственном расслоении в двойственных базисах?

5. Выразите через символы Кристоффеля ковариантную производную $\nabla_k\, g_{i,j}$ римановой метрики, рассматриваемой как сечение расслоения $(T^*M)^{\otimes 2}$.

Дифференциальная геометрия
Листок 7
17 ноября 2014 г.

Кривизна связности — линейное преобразование R, действующее в слоях расслоения и зависящее билинейным и кососимметричным образом от пары касательных векторов на базе. Вот различные его эквивалентные интерпретации:
1) *Действие на сечениях*:

$$R(\xi, \eta) = \nabla_\xi \nabla_\eta - \nabla_\eta \nabla_\xi - \nabla_{[\xi,\eta]}$$

2) *Представление в тривиализации* как матрица 2-форм (*структурное уравнение Картана*):

$$R = dA + A \wedge A.$$

3) *Координатное представление*

$$R(\partial_{x^k}, \partial_{x^\ell})^i_j = R^i_{jk\ell} = \frac{\partial \Gamma^i_{j\ell}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^\ell} + \Gamma^i_{mk}\Gamma^m_{j\ell} - \Gamma^i_{m\ell}\Gamma^m_{jk}.$$

4) Как *инфинитезимальная голономия*: параллельный перенос слоев расслоения по периметру параллелограмма со сторонами $\varepsilon\xi, \varepsilon\eta$ равен

$$\mathrm{Id} - \varepsilon^2 R(\xi, \eta) + o(\varepsilon^2).$$

1. Докажите, что действующий на сечения оператор определения 1) коммутирует с умножением на функции, и, тем самым, действительно определяет линейное преобразование слоев расслоения.
2. Вычислите кривизну (т.е. матрицу R 2-форм и коэффициенты R^i_{jkl}) связностей задач 1,2,3 предыдущего листка.

Теорема. *Связность плоская тогда и только когда, когда ее кривизна тождественно равна нулю.*

3. Пусть связность в расслоении ранга 1 на плоскости задана (1×1) матрицей 1-форм а) $A = (y\,dx - x\,dy)$ и б) $A = (y\,dx + x\,dy)$. Найдите ковариантно постоянное продолжение сечения $s(0,0) = 1$ в начале координат в точку $(1,1)$ вдоль следующих кривых: прямолинейного отрезка; ломаной $(0,0)$—$(1,0)$—$(1,1)$; ломаной $(0,0)$—$(0,1)$—$(1,1)$.

4. Докажите, что связность в расслоении ранга 3 над двумерной базой с координатами (x, y) и следующей матрицей 1-форм плоская. Найдите базис ковариантно постоянных сечений.

$$A = \begin{pmatrix} -dy & dx - x\,dy & xy\,dx - x\,dy \\ 0 & 0 & -y\,dx + dy \\ 0 & 0 & dx \end{pmatrix}$$

5. Пусть A — матрица связности задачи 1 листка 6 (в полярных координатах на плоскости). Напишите условие ковариантной постоянности сечений. Постройте базис ковариантно постоянных сечений и докажите, тем самым, что эта связность плоская.

6. Сечения тривиального расслоения со слоем $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ над проколотой плоскостью $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ могут рассматриваться как комплекснозначные фукнции. Введем связность в этом расслоении формулой

$$\nabla_\xi u = \partial_\xi u + a \frac{\xi_1 + i\xi_2}{x_1 + ix_2} u,$$

где $\xi = \xi_1 \partial_{x_1} + \xi_2 \partial_{x_2}$ и $a \in \mathbb{C}$ — константа. Плоская ли эта связность? Найдите параллельное преобразование, задаваемое этой связностью вдоль окружности радиуса 2 с центром в точке $(0,1)$.

Дифференциальная геометрия
Листок 8
24 ноября 2013 г.

Связность в расслоении E со скалярным произведением в слоях называется *согласованной с метрикой*, если индуцированная связность в двойственном расслоении E^* совпадает с исходной при отождествлении E и E^*, задаваемом скалярным произведением.
Связность в касательном расслоении называется *симметричной*, если для произвольных двух векторных полей выполняется равенство $\nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi = [\xi, \eta]$.

Теорема. *В касательном расслоении к риманову многообразию имеется естественная связность (называемая* связностью Леви-Чивиты*), однозначно определяемая двумя требованиями: 1) согласованность с римановой структурой и 2) симметричность.*
Символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты (в базисе координатных векторных полей) задаются равенствами

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{is} \Big(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^j} \Big).$$

Эквивалентным образом, матрица A связности Леви-Чивиты находится из соотношения

$$gA = \frac{1}{2}(dg + s), \qquad s_{ij} = -\partial_i g_j + \partial_j g_i,$$

(слагаемые в скобках описывают симметричную и кососимметричную компоненты матрицы), где $g_i = g(\partial_{x_i}, \cdot)$ — 1-форма, двойственная i-му координатному векторному полю; ее компоненты образованы i-м столбцом (или строкой) матрицы g, а ∂_i — покомпонентная производная соответствующих 1-форм.

1. Докажите эквивалентность следующих условий согласованности с метрикой:
— индуцированная связность в двойственном расслоении E^* совпадает с исходной при отождествлении E и E^*, задаваемом метрикой;
— для произвольных двух сечений u, v и векторного поля ξ выполняется равенство
$$\partial_\xi (u, v) = (\nabla_\xi u, v) + (u, \nabla_\xi v);$$
— матрица связности кососимметрична *в ортонормированном базисе*;
— параллельный перенос является ортогональным преобразованием (т.е. сохраняет скалярное произведение).

2. Докажите, что условие симметричности метрики $\nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi = [\xi, \eta]$ равносильно симметрии символов Кристоффеля $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ в *базисе координатных векторных полей.*

3. Докажите, что из ковариантной постоянности 1-формы симметричной связности вытекает ее замкнутость.

4. Докажите, что для случая двумерной римановой поверхности связность Леви-Чивиты в касательном расслоении совпадает с римановой связностью, введенной в листке 6.

   Теорема. *Если R — матрица кривизны римановой связности на поверхности* (см. предыдущую задачу), *то матрица gR кососимметрическая. Кривизна метрики выражается через* $(1,2)$*-компоненту $R_{1212}\,dx^1\wedge dx^2$ матрицы gR по формуле*

$$K = \frac{R_{1212}}{\det g}.$$

5. Действуя в базисе координатных векторных полей, вычислите связность Леви-Чивиты (т.е. символы Кристоффеля или матрицу 1-форм), а также кривизну (при помощи формулы приведенной выше теоремы) и уедитесь, тем самым, в справедливости теоремы для следующих метрик:
   а) евклидовой метрики на плоскости в поляных координатах;
   б) метрики на единичной сфере в сферических координатах;
   в) метрики на псевдосфере в псевдосферических координатах;
   г) метрики на параболоиде вращения в евклидовом пространстве;
   д) для метрики $g = dx^2 + 2\cos\omega\, dx\, dy + dy^2$, где $\omega(x, y)$ — произвольная гладкая функция.

Дифференциальная геометрия
Листок 9
1 декабря 2014 г.

Тензором кривизны Римана называется тензор кривизны связности Леви-Чивиты (в касательном расслоении риманова многообразия). Коэффициенты $R_{ijk\ell} = g_{is}R^s_{jk\ell}$ тензора кривизны Римана обладают большим количеством симметрий

$$R_{ijk\ell} = -R_{ij\ell k} = -R_{jik\ell} = R_{ji\ell k},$$
$$R_{ijk\ell} + R_{ik\ell j} + R_{i\ell jk} = 0,$$
$$R_{ijk\ell} = R_{k\ell ij}.$$

1. Докажите равенство $R_{ijk\ell} = R_{k\ell ij}$ для тензора кривизны Римана (предполагая остальные симметрии доказанными).

2. Вычислите размерность пространства 4-линейных форм на n-мерном векторном пространстве, обладающих симметриями тензора Римана кривизны в случае $n = 2, 3, 4$, при произвольном n.

Тензором Риччи и *скалярной кривизной* называется свертка тензора Римана по паре индексов и по двум парам индексов, соответственно

$$\mathrm{Ric}_{j\ell} = R^i ji\ell, \qquad R = g^{j\ell}\mathrm{Ric}_{j\ell} = g^{j\ell}R^i_{ji\ell}.$$

3. Докажите, что при $n = 2$ тензор Римана кривизны однозначно определяется скалярной кривизной. Выразите гауссову кривизну через скалярную.

4. Докажите, что при $n = 3$ тензор кривизны Римана однозначно определяется тензором Риччи.

Теорема. *Риманова метрика евклидова (приводится локально заменой координат к сумме квадратов) тогда и только тогда, когда ее тензор кривизны тождественно равен нулю.*
Для построения евклидовых координат нужно искать ковариантно постоянные векторные поля (они служат координатными полями евклидовой системы координат) или, что даже более разумно, искать ковариантно постоянные 1-формы (они служат дифференциалами евклидовых координат).

5. Действуя в базисе координатных векторных полей, найдите евклидовы координаты для метрик из задачи 1 листка 4:
а) $dx^2 + x^2\,dy^2$;
б) $\dfrac{dx^2 + dy^2}{(x^2 + y^2)^2}$;
в) первая квадратичная форма на конусе $z^2 = x^2 + y^2$ в его гладких точках;
г) $dx^2 + 2\cos(x+y)\,dx\,dy + dy^2$.

Дифференциальная геометрия
8 декабря 2014 г., листок 10
Контрольная работа

Задана метрика $(a+x^2+y^2)(dx^2+dy^2)$ в дополнении к началу координат на плоскости (a — вещественный параметр). Действуя в базисе координатных касательных векторов $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$, определите:

0. Матрицу метрики и ей обратную.
1. Матрицу A связности Леви-Чевиты в касательном расслоении к поверхности и символы Кристоффеля.
2. Матрицу кривизны $R = dA + A \wedge A$.
3. Матрицу 2-форм gR и убедитесь, что она кососимметрична. Вычислите гауссову кривизну $K = \frac{R_{1212}}{\det g}$.

   В дальнейших задачах полагается $a = 0$.
4. Является ли вычисленная выше связность плоской при $a = 0$?
5. Выпишите матрицу сопряженной связности в кокасательном расслоении и напишите уравнения ковариантной постоянности для 1-формы $u\,dx + v\,dy$.
6. Предъявите базис в пространстве ковариантно постоянных 1-форм. Замкнуты ли найденные 1-формы?
7. Найдите евклидовы координаты для метрики $(x^2+y^2)(dx^2+dy^2)$.