Дифференциальная геометрия
Листок 1
8 сентября 2014 г.

Параметризация $\tau \mapsto \gamma(\tau)$ кривой в евклидовом пространстве называется *натуральной*, если $|\dot\gamma| = |\frac{\partial\gamma}{\partial\tau}| \equiv 1$. Для натуральной параметризации $d\tau$ — элемент длины на кривой и выполняется $(\dot\gamma, \ddot\gamma) = 0$. Величина $k = |\ddot\gamma|$ (вычисленная в натуральной параметризации) называется *кривизной кривой* γ; *радиусом кривизны* называется обратная величина $R = \frac{1}{k}$.

1. Определите кривизну а) окружности радиуса R; б) параболы $y = \frac{a}{2}x^2$; в) винтовой кривой $(a\cos t,\ a\sin t,\ b\,t)$.

2. Выведите формулу для кривизны кривой в произвольной параметризации а) на плоскости; б) в $\mathbb{R}^3$.

   Из всех окружностей, касающихся кривой на плоскости в данной точке, наибольший порядок касания (по крайней мере кубический) имеет окружность, радиус которой равен радиусу кривизны. Центр такой окружности называется *центром кривизны*. Множество центров кривизны образует кривую, которую, в зависимости от контекста, называют *эволютой*, *каустикой*, или *фокальным множеством.*

3. Докажите, что эволюта является огибающей семейства нормалей (т.е. что всякая нормаль касается эволюты в соответствующей точке).

4. Докажите, что эволюта имеет особенности (в общем случае, полукубического типа) в точках, соответствующих экстремумам (локальным максимумам и минимумам) кривизны.

5. Изобразите фокальное множество а) параболы б) эллипса.

Для поверхности в $\mathbb{R}^3$, заданной параметрически $r = r(u_1, u_2) = (x(u_1,u_2), y(u_1,u_2), z(u_1,u_2))$, коэффициенты *римановой метрики* (первой квадратичной формы) $g = g_{11}du_1^2 + 2g_{12}du_1du_2 + g_{22}du_2^2$ задаются равенствами

$$g_{ij} = (r_i, r_j), \quad r_i = \frac{\partial r}{\partial u_i}.$$

Альтернативно, метрику можно найти подстановкой в $dx^2+dy^2+dz^2$ выражений для дифференциалов координатных функций x, y, z выбранной параметризации поверхности.

Величины, для вычисления которых достаточно знать риманову метрику, относят к *внутренней геометрии* поверхности. В частности, к внутренней геометрии поверхности относятся вычисления длин, углов и площадей. Например, *элемент площади* задается 2-формой $\sigma = \sqrt{|\det g|}\ du_1 \wedge du_2$.

Коэффициенты *второй квадратичной формы* поверхности $h = h_{11}du_1^2 + 2h_{12}du_1du_2 + h_{22}du_2^2$ задаются равенствами

$$h_{ij} = (r_{ij}, n) = -(r_i, \tfrac{\partial n}{\partial u_j}), \qquad r_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial u_j} = \frac{\partial^2 r}{\partial u_i \partial u_j},$$

где $n = \frac{r_1 \times r_2}{|r_1 \times r_2|}$ — вектор единичной нормали к поверхности.
Главные кривизны $\lambda_{1,2}$ — корни характеристического уравнения $\det(h - \lambda g) = 0$.
Гауссова кривизна $K = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{\det h}{\det g}$, *средняя кривизна* $\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

6. Определите риманову метрику, вторую квадратичную форму, гауссову и среднюю кривизны для следующих поверхностей:
   а) сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;
   б) параболоид вращения $z = \frac{a}{2}\,(x^2 + y^2)$;
   в) тор $\big((R + r\cos\varphi)\cos\psi,\ (R + r\cos\varphi)\sin\psi,\ z = r\sin\varphi\big)$.

Пусть кривая γ лежит на поверхности в $\mathbb{R}^3$. Ее *нормальной* k_n и *геодезической* k_g кривизнами называются длины ортогональной проекции вектора $\ddot{\gamma}$, вычисленного в нормальной параметризации, на нормальную прямую и касательную плоскость поверхности, соответственно. По теореме Пифагора, $k^2 = k_n^2 + k_g^2$.

7. Докажите, что нормальная кривизна кривой зависит только от направления ее касательной. Вычислите нормальную кривизну кривой, образующей угол θ с одним из главных направлений поверхности.

8. Вычислите нормальную и геодезическую кривизны а) окружности радиуса r на сфере радиуса R; б) кривой на *гиперболическом параболоиде* $z = x\,y$, высекаемой цилиндром $x^2 + y^2 = 1$.

«Блистательная теорема» Гаусса (**Theorema Egregium**) утверждает, что, в отличие от средней кривизны, *гауссова кривизна относится к внутренней геометрии поверхности*, то есть может быть выражена через коэффициенты римановой метрики (и их частные производные). *Геодезическая кривизна кривой на поверхности*, в отличие от нормальной, *также относится к внутренней геометрии поверхности.*

Дифференциальная геометрия
Листок 2
15 сентября 2014 г.

Пусть заданы два векторных поля ξ, η — на поверхности в трехмерном пространстве. Рассматривая η как столбец из трех компонент, обозначим через $\partial_\xi \eta$ его покомпонентную производную. Ее нормальная составляющая равна значению $h(\xi, \eta)$ второй квадратичной формы на паре векторов ξ и η, а касательная называется *ковариантной производной*,

$$\partial_\xi \eta = \nabla_\xi \eta + h(\xi, \eta).$$

Теорема. *Понятие ковариантной производной относится к внутренней геометрии поверхности.*
Более явно, в *ортонормированном* базисе векторных полей e_1, e_2 ковариантная производная задается равенствами

$$\nabla_\xi e_1 = \alpha(\xi)\, e_2, \qquad \nabla_\xi e_2 = -\alpha(\xi)\, e_1,$$

где α — дифференциальная 1-форма, называемая *формой связности*, коэффициенты которой $\alpha_i = \alpha(e_i)$ вычисляются коммутированием полей,

$$[e_1, e_2] = -\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2.$$

1. Докажите, что операция ковариантной производной $\nabla_\xi \eta$ линейна по ξ, а относительно умножения поля η на функцию удовлетворяет правилу Лейбница $\nabla_\xi f\eta = f\nabla_\xi \eta + (\partial_\xi f)\, \eta$.
2. Докажите, что операция ковариантной производной удовлетворяет равенству

$$\partial_\xi(\eta, \zeta) = (\nabla_\xi \eta, \zeta) + (\eta, \nabla_\xi \zeta).$$

Пусть задана кривая γ на поверхности M и поле v касательных векторов вдоль нее, $v(t) \in T_{\gamma(t)}M$. Поле v называется *ковариантно постоянным* (параллельным), если $\nabla_{\gamma'} v = 0$, иными словами, если покомпонентная производная $\frac{d}{dt}v(t)$ ортогональна касательной плоскости к поверхности в каждой точке кривой. Это условие задает операцию параллельного переноса касательных векторов вдоль кривой. Вот основные свойства операции параллельного переноса:
— Для евклидовой плоскости эта операция совпадает с обычным параллельным переносом.
— Параллельный перенос не зависит от параметризации кривой, но зависит, вообще говоря, от выбора кривой, соединяющией две данные точки.
— Параллельный перенос сохраняет длины векторов, углы между ними и, более общим образом, скалярное произведение.
— *Понятие параллельного переноса относится к внутренней геометрии и однозначно определяется метрикой на поверхности.*
— Если две поверхности касаются друг друга вдоль кривой, то параллельный перенос вдоль этой кривой для обеих поверхностей совпадает.

— В частности, *разверткой* поверхности вдоль данной кривой называется поверхность с плоской (т.е. евклидовой) метрикой, касающаяся искодную поверхность вдоль данной кривой. Параллельный перенос на поверхности совпадает с параллельным переносом на ее развертке.

Если в некотором ортонормированном базисе e_1, e_2 касательных полей данное поле имеет вид $v = v_1(t)\, e_1 + v_2(t)\, e_2$, то параллельный перенос задается дифференциальным уравнением

$$\frac{dv_1}{dt} = \alpha(\gamma')\, v_2, \quad \frac{dv_2}{dt} = -\alpha(\gamma')\, v_1,$$

где α — определенная выше 1-форма связности и $\gamma' = \frac{d\gamma}{dt}$ — вектор скорости движения по кривой. Если же записать поле v в виде $v = \rho(t)\,\big(\cos(\varphi(t))\, e_1 + \sin(\varphi(t))\, e_2\big)$, то уравнение параллельного переноса приобретает вид

$$\rho = \mathrm{const}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\alpha(\gamma').$$

При обходе вдоль замкнутой петли, ограничивающей односвязную область D, касательный вектор поворачивается на угол

$$\Delta\varphi = \oint \frac{d\varphi}{dt} dt = -\int_{\partial D} \alpha = \int_D K\sigma,$$

где K — гауссова кривизна и σ — форма площади.

3. Вычислите параллельный перенос на сфере вдоль ее параллели тремя разными способами: а) геометрически при помощи развертки, представляющей собой квадратичный конус, касающийся сферы вдоль параллели, б) выписывая и решая дифференциальное уравнение параллельного переноса, и в) вычисляя площадь сферической области, ограниченной параллелью.

   Отображение Гаусса $M \to S^2$ сопоставляет точке на поверхности $M \subset \mathbb{R}^3$ единичный нормальный вектор в этой точке. Касательная плоскость T_xM к поверхности параллельна касательной плоскости сферы $T_{G(x)}S^2$ в точке образа отображения Гаусса. Следовательно, эти две плоскости можно отождествить и считать, что производная G_* отображения Гаусса действует из касательной плоскости в себя.

4. Докажите следующие свойства отображения Гаусса:

   а) Собственные векторы производной G_* совпадают с главными направлениями поверхности, а собственные значения равны $-\lambda_1$ и $-\lambda_2$ соответственно, где λ_1 и λ_2 — главные кривизны. Соответственно, гауссова кривизна совпадает с определителем производной гауссова отображения.

   б) Параллельный перенос векторов на поверхности вдоль кривой совпадает с параллельным переносом векторов на сфере вдоль образа кривой при гауссовом отображении.

   в) Форма кривизны на поверхности равна $K\sigma = G^*\Sigma$, обратному образу формы площади Σ на сфере. В частности, имеет место равенство $\int_M K\, s = 4\,\pi\, d$, где $4\pi = \int_{S^2} \Sigma$ — площадь сферы, а d — степень гауссова отображения.

5. Выберите какое-нибудь вложение поверхности рода g в пространство и вычислите степень Гауссова отображения для этого вложения.

Дифференциальная геометрия
Листок 3
22 сентября 2014 г.

Вот способ вычислить ковариантную производную и гауссову кривизну по метрике, ничего не зная о вложении поверхности в трехмерное пространство. При помощи ортогонализации приведем ее к сумме квадратов, $g = u_1^2 + u_2^2$, где u_1 и u_2 — 1-формы. Определим 1-*форму связности* α равенствами

$$\alpha = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \qquad du_1 = \alpha_1\,\sigma, \quad du_2 = \alpha_2\,\sigma,$$

где $\sigma = u_1 \wedge u_2$ — форма площади. Тогда ковариантная производная задается в базисе векторных полей e_1, e_2, двойственном базису 1-форм u_1, u_2, равенствами

$$\nabla_\xi e_1 = \alpha(\xi)\,e_2, \quad \nabla_\xi e_2 = -\alpha(\xi)\,e_1,$$

а кривизна метрики — соотношением

$$d\alpha = -K\,\sigma.$$

Теорема. 1. *Ковариантная производная и кривизна K метрики, определенные выше, не зависят от выбора 1-форм u_1 и u_2.*
2. *В случае, когда метрика на поверхности задается вложением поверхности в евклидово пространство $\mathbb{R}^3$, K совпадает с гауссовой кривизной, а ковариантная производная – с касательной составляющей покомпонентной производной.*

1. Докажите, что приведенные выше формулы для коэффициентов α_1 и α_2 формы связности эквивалентны формулам из предыдущего листка.

2. Вычислите гауссову кривизну следующих метрик:
   а) $dx^2 + \sin^2 x\,dy^2$;

   б) $dx^2 + \mathrm{sh}^2\,x\,dy^2$;

   в) $dx^2 + x^2\,dy^2$;

   г) $\dfrac{4\,(dx^2 + dy^2)}{(1 + k(x^2 + y^2))^2}$;

   д) метрики, представленной в *конформном виде* $g(x, y)\,(dx^2 + dy^2)$, где $g(x, y) > 0$ — некоторая гладкая функция;

   е) $dx^2 + 2\,\cos\omega\,dx\,dy + dy^2$, где $\omega = \omega(x, y)$ — гладкая функция;

   ё,ж,з) для индуцированной римановой метрики на поверхностях в $\mathbb{R}^3$ из задачи 6 Листка 1.

Дифференциальная геометрия
Листок 4
29 сентября 2014 г.

Теорема. *Риманова метрика на поверхности евклидова тогда и только тогда, когда её кривизна K тождественно обращается в ноль.*

Построение евклидовых координат сводится к построению ортонормированного репера ковариантно постоянных 1-форм. Пусть задан ортонормированный репер 1-форм u_1, u_2, и по нему построен новый репер $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ поворотом на угол ψ, зависящий от точки поверхности:

$$\tilde{u}_1 = \cos\psi\; u_1 + \sin\psi\; u_2, \qquad \tilde{u}_2 = -\sin\psi\; u_1 + \cos\psi\; u_2.$$

Тогда условие ковариантной постоянности повернутого репера имеет вид

$$\alpha + d\psi = 0,$$

где α — форма связности, ассоциированная с исходным репером. В частности, если $K \equiv 0$, то есть $d\alpha = 0$, то форма α является (локально) дифференциалом функции и приведенное уравнение на функцию ψ разрешимо. Условие ковариантной постоянности для повернутого репера равносильно равенству $d\tilde{u}_1 = d\tilde{u}_2 = 0$. Следовательно, $\tilde{u}_1$ и $\tilde{u}_2$ являются дифференциалами функций. Эти функции и служат искомыми евклидовыми координатами.

1. Докажите, что следующие метрики евклидовы. Найдите евклидовы координаты.
   а) $dx^2 + x^2\, dy^2$;
   б) $\dfrac{dx^2 + dy^2}{(x^2 + y^2)^2}$;
   в) первая квадратичная форма на конусе $z^2 = x^2 + y^2$ в его гладких точках;
   г) $dx^2 + 2\,\cos(x{+}y)\, dx\, dy + dy^2$.
2. *Разверткой* пространственной кривой называется объединение ее касательных. Параметризуйте развертку. Определите первую и вторую квадратичные формы, а также главные кривизны развертки кривой с (непостоянной) кривизной k. Докажите, что гауссова кривизна развертки равна нулю. Найдите евклидовы координаты на развертке спиральной кривой $(a\cos t,\; a\sin t,\; b\,t)$.

Плоскостью Лобачевского называется верхняя пола $z > 0$ двуполостного гиперболоида $z^2 - x^2 - y^2 = 1$, снабженная метрикой, полученной ограничением на эту поверхность формы $dx^2 + dy^2 - dz^2$.

3. Докажите, что это действительно метрика (т.е. положительно определенная форма). Найдите ее выражение в *псевдосферических* координатах

$$x = \operatorname{sh}\varphi\ \cos\psi, \quad y = \operatorname{sh}\varphi\ \sin\psi, \quad z = \operatorname{ch}\varphi.$$

4. Модель Клейна плоскости Лобачевского — ее центральная проекция из начала координат на плоскость $z = 1$. Найдите выражение для метрики плоскости Лобачевского в модели Клейна.

5. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского — ее центральная проекция из точки $(0, 0, -1)$ на плоскость $z = 0$. Найдите выражение для метрики плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре.

6. Рассмотрим единичный диск модели Пуанкаре плоскости Лобачевского и отобразим его на верхнюю полуплоскость при помощи голоморфной функции $x + i\,y \mapsto f(x + i\,y)$, где $f(w) = -i\frac{w+i}{w-i}$. Найдите метрику получившейся модели плоскости Лобачевского на верхней полуплоскости.

7. Определите кривизну плоскости Лобачевского (в какой-либо, а следовательно, любой из приведенных ее моделей).

Дифференциальная геометрия
Листок 5
6 октября 2013 г.
Задачи письменного домашнего задания

Поверхность Эннепера задается в $\mathbb{R}^3$ параметризацией

$$(u - \frac{u^3}{3} + u\,v^2,\ v - \frac{v^3}{3} + v\,u^2,\ u^2 - v^2).$$

1. Определите риманову метрику.
2. Найдите вторую квадратичную форму.
3. Найдите главные кривизны и гауссову кривизну.
4. Вычислите площадь части поверхности, заданной неравенством $u^2 + v^2 \leq 1$, а также интеграл от гауссовой кривизны по той же области.
5. Вычислите кривизну метрики задачи 1 и сравните ее с гауссовой кривизной задачи 3.
6. Определите геодезическую кривизну кривой на поверхности Эннепера, заданной уравнением $u^2 + v^2 = 1$ (в разных ее точках).
7. Вычислите интеграл от геодезической кривизны по кривой предыдущей задачи и сравните его с интегралом от гауссовой кривизны по области, ограниченной этой кривой.

Дифференциальная геометрия
Задачи письменного зачета
27 октября 2014 г.

1. Пусть γ — гладкая замкнутая кривая на плоскости с кривизной $k(t)$, где t — натуральный параметр. Найдите площадь полоски, заметаемой нормальным вектором длины ε кривой, а также длину следа, оставляемого концом нормального вектора длины ε при движении точки вдоль кривой.

2. Рассмотрим центральную проекцию единичной сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в евклидовом трехмерном пространстве из оси Oz вдоль горизонтальных плоскостей на поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ (это отображение часто используется в картографии). Сохраняет ли это отображение углы? Сохраняет ли оно площади?

3. Те же вопросы, что и в предыдущей задаче, про описанное ниже отображение *катеноида* на *геликоид*. Катеноид и геликоид — поверхности, заданные параметрически
$$x = \operatorname{ch} v \cos\varphi, \quad y = \operatorname{ch} v \sin\varphi, \quad z = v,$$
$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = \varphi,$$
соответственно, а отображение сопоставляет точке с криволинейными координатами (v, φ) на катеноиде точку с координатами $\rho = \operatorname{sh} v$ и φ на геликоиде.

4. Пусть U — область $x^2+y^2 \leq 1$ на поверхности $z = x\,y$ в трехмерном евклидовом пространстве. Вычислите площадь поверхности U а также площадь образа этой поверхности при отображении Гаусса и угол, на который поворачивается касательная плоскость при параллельном переносе вдоль края этой поверхности.

5. Пусть метрика на поверхности в некоторой точке имеет в локальных координатах разложение
$$g = dx^2 + dy^2 + A\,(x\,dy - y\,dx)^2 + \dots,$$
где многоточие обозначает члены более высокого порядка малости (т.е. степени больше 2 по x и y). Найдите кривизну этой метрики в точке $x = y = 0$.