Введение в топологию — II

Вопросы коллоквиума

Для получения билета надо будет без подготовки ответить на два вопроса по определениям и сформулировать одну из теорем. А именно, надо знать определения следующих понятий:
гомотопные непрерывные отображения топологических пространств; гомотопически эквивалентные топологические пространства; фундаментальная группа топологического пространства с отмеченной точкой; односвязное топологическое пространство; накрытие топологического пространства; универсальное накрытие; локально линейно связное топологическое пространство; полулокально односвязное топологическое пространство; эквивалентность накрытий; регулярное накрытие; свободное произведение групп; полусимплициальное множество; геометрическая реализация полусимплициального множества (Δ-комплекс); цепной комплекс полусимплициального множества; сингулярный цепной комплекс топологического пространства; сингулярные гомологии топологического пространства;
и формулировки теорем:
лемма о лебеговом числе; теорема о накрывающей гомотопии; теорема о соответствии между классами эквивалентности накрытий и подгруппами фундаментальной группы; теорема ван Кампена.

А затем (после небольшой подготовки, во время которой пользоваться нельзя ничем) ответить на один или два вопроса из следующего списка (один или два — в зависимости от объема вопросов):

1. докажите, что фундаментальная группа действительно является группой, а любое непрерывное отображение пространств с отмеченной точкой индуцирует гомоморфизм фундаментальных групп, не меняющийся при замене отображения на гомотопное;

2. докажите, что фундаментальная группа прямого произведения двух топологических пространств изоморфна прямому произведению их фундаментальных групп;

3. докажите, что если топологическое пространство линейно связно, то его фундаментальные группы для различных отмеченных точек изоморфны, причем этот изоморфизм определен однозначно с точностью до внутреннего автоморфизма одной из групп;

4. докажите лемму о лебеговом числе;

5. докажите, что любой путь можно поднять на накрытие, причем поднятие однозначно определяется выбором прообраза начальной точки пути;

6. докажите теорему о накрывающей гомотопии;

7. докажите, что фундаментальная группа окружности изоморфна группе целых чисел;

8. докажите, что для линейно связного пространства X следующие условия эквивалентны: а) фундаментальная группа тривиальна, б) любое непрерывное отображение окружности в X гомотопно отображению в точку, в) любые два пути с заданными концами гомотопны (как пути с закрепленными концами);

9. докажите, что фундаментальные группы гомотопически эквивалентных линейно связных пространств изоморфны;

10. докажите, что линейно связное и локально линейно связное топологическое пространство имеет универсальное накрытие тогда и только тогда, когда оно полулокально односвязно;

11. докажите теорему о соответствии между классами эквивалентности накрытий и подгруппами фундаментальной группы;

12. докажите, что накрытие регулярно тогда и только тогда, когда соответствующая подгруппа в фундаментальной группе базы нормальна;

13. докажите теорему ван Кампена (для покрытия двумя открытыми множествами);

14. докажите, что гомотопные отображения топологических пространств индуцируют одинаковые гомоморфизмы групп сингулярных гомологий.