6. ГОМОЛОГИИ.

1. Клеточные пространства

Клеточное пространство — хаусдорфово топологическое пространство X со следующей дополнительной структурой: имеется разбиение $X = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigsqcup_{\alpha \in I_k} e_\alpha^k$ на подмножества e_α^k, называемые клетками, для каждой клетки имеется непрерывное отображение замкнутого k-мерного шара $\gamma_\alpha^k : D^k \to \overline{e_\alpha^k}$ (характеристическое отображение клетки e_α^k; черта сверху означает замыкание) такое, что $\gamma_\alpha^k\big|_{\mathrm{Int}(D^k)} : \mathrm{Int}(D^k) \to e_\alpha^k$ — гомеоморфизм на e_α^k. При этом разбиение обладает следующими двумя свойствами:

(C) Граница $\partial e_\alpha^k \stackrel{\text{def}}{=} \overline{e_\alpha^k} \setminus e_\alpha^k$ содержится в объединении конечного множества клеток e_β^i с $i < k$ (т.е. меньшей размерности).

(W) Множество $F \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуто его пересечение с замыканием любой клетки.

Множества индексов I_k могут быть бесконечными; для некоторых k они также могут быть пустыми, т.е. не обязательно существуют клетки всех размерностей.

n-мерный остов $\mathrm{sk}_n X$ — объединение всех клеток размерности не выше n. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ двух клеточных пространств называется *клеточным*, если $f(\mathrm{sk}_n X) \subset \mathrm{sk}_n Y$. Теорема о клеточной аппроксимации: любое непрерывное отображение $f : X \to Y$ клеточных пространств гомотопно клеточному. Относительный вариант теоремы: если эта гомотопия уже задана на клеточном подпространстве в пространстве X, то ее можно продолжить до гомотопии на всем X.

Задача 1. Докажите, что клеточное пространство а) линейно связно тогда и только тогда, когда его 1-остов линейно связен; б) компактно тогда и только тогда, когда состоит из конечного числа клеток.

Задача 2*. Клеточное пространство $\bigvee_{i=1}^{\infty} S^1$ — букет счетного числа окружностей (с очевидным клеточным разбиением и топологией, определяемой аксиомой W). Докажите, что топология в X не порождается никакой метрикой.

Задача 3. Клеточное пространство S^∞ — множество финитных (т.е. таких, что только конечное число членов отличны от нуля) последовательностей действительных чисел $x = (x_0, x_1, \dots)$ таких, что $x_0^2 + x_1^2 + \dots = 1$. Пусть $e_+^{(i)} = \{x \in S^\infty \mid x_i > 0, x_{i+1} = x_{i+2} = \dots = 0\}$, $e_-^{(i)} = \{x \in S^\infty \mid x_i < 0, x_{i+1} = x_{i+2} = \dots = 0\}$. Топология в S^∞ определяется так: имеется каноническое вложение $\iota_n : S^n \to S^\infty$, заданное формулой $\iota_n(x_0, \dots, x_n) = (x_0, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$. Множество $F \subset S^\infty$ называется замкнутым, если $\iota_n^{-1}(F) \subset S^n$ замкнуто при любом n. а) Докажите, что это определение действительно задает топологию. б) Докажите, что множества $e_\pm^{(i)}$ образуют клеточное разбиение. в*) Докажите, что пространство S^∞ стягиваемо.

2. Клеточные гомологии

В следующей задаче нужно построить клеточное разбиение пространства X и вычислить его гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Если даны два пространства X и Y и отображение $f : X \to Y$, то нужно подобрать клеточные разбиения так, чтобы отображение f было клеточным, а также вычислить гомоморфизм f_* на гомологиях.

Задача 4. а) X — тор $S^1 \times S^1$; б) X — сфера с g ручками; в) X — бутылка Клейна; г) X — проективная плоскость; д*) X — бутылка Клейна с g ручками; е*) X — проективная плоскость с g ручками; ж) X — сфера с g ручками и n дырками; Y — сфера с g ручками, $f : X \to Y$ — вложение. з) $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $Y = S^1$, $f : X \to S^1$ — проекция $f(v) = v/|v|$; и) $X = \mathbb{C}P^2$; к) $X = \mathbb{C}P^n$; л) $X = S^n$, $Y = \mathbb{R}P^n$, $f : X \to Y$ — стандартное двулистное накрытие. м*) $X = S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$, $Y = S^2 = \mathbb{C}P^1$, $f : X \to Y$ — расслоение Хопфа: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1 + ix_2 : x_3 + ix_4]$. н*) $X = S^\infty$, $Y = \mathbb{C}P^\infty$ (дайте определение!), $f : S^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$ — аналог расслоения Хопфа: $p(x_1, x_2, \dots) = [x_1 + ix_2 : x_3 + ix_4 : \dots]$.

Задача 5. а) Докажите, что $\mathbb{R}^m$ не гомеоморфно $\mathbb{R}^n$ при $m \neq n$. б) Докажите, что сфера S^n не стягиваема. в) Докажите теорему Брауэра: всякое отображение шара $f : D^n \to D^n$ имеет неподвижную точку.

Задача 6*. Пусть $G(2, \mathbb{R}^4)$ — множество двумерных подпространств в $\mathbb{R}^4$. Зафиксируем в $\mathbb{R}^4$ базис $(e_1, \dots, e_4)$ и последовательность $a = (a_1, \dots, a_4)$, где $a_i \in \{0, 1, 2\}$. Обозначим $\Pi_a \subset G(2, \mathbb{R}^4)$ множество подпространств $L \subset \mathbb{R}^4$ таких, что $\dim L \cap \langle e_1, \dots, e_i \rangle = a_i$ для всех i. а) Для каких последовательностей a множество Π_a непусто? б) Докажите, что если множество Π_a непусто, то оно гомеоморфно открытому шару; уточните размерности шаров. в) Докажите, что множества Π_a образуют клеточное разбиение пространства $G(2,\mathbb{R}^4)$. г) Вычислите гомологии $G(2,\mathbb{R}^4)$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

3. Последовательность Майера–Виеториса и точная последовательность пары

Пусть X — топологическое пространство и $X = A \cup B$, где $A, B \subset X$ открыты. Последовательность Майера–Виеториса — точная последовательность гомологий:

$$\dots \to H_n(A \cap B) \xrightarrow{(\iota_A)_* \oplus (\iota_B)_*} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{(\mu_A)_* - (\mu_B)_*} H_n(X) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(A \cap B) \to \dots \to H_0(X) \to 0,$$

где $\iota_A : A \cap B \to A$, $\iota_B : A \cap B \to B$, $\mu_A : A \to X$ и $\mu_B : B \to X$ — тавтологические вложения.

Точная последовательность пары $A \subset X$ это последовательность гомологий

$$\dots \to H_n(A) \xrightarrow{\iota_*} H_n(X) \xrightarrow{p_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(A) \to \dots,$$

где $\iota : A \to X$ — тавтологическое вложение, $p : (X, \varnothing) \to (X, A)$ — тавтологическая проекция пары, а отображение δ ставит в соответствие относительному циклу в (X, A) его границу (лежащую в A). Теорема Борсука: если X — клеточное пространство, а $A \subset X$ — его подпространство, то $H_n(X, A) = H_n(X/A, \mathrm{pt}) = H_n(X/A)$ (первое равенство для всех n, второе для $n > 0$).

В следующей задаче нужно выписать последовательность Майера–Виеториса для разбиения $X = A \cup B$, т.е. описать явно все входящие в нее пространства (гомологии) и гомоморфизмы (для пункта 7г, возможно, не совсем все).

Задача 7. а) $X = S^1$, $A = S^n \setminus \{a\}$ и $B = S^n \setminus \{b\}$, где a и b — диаметрально противоположные точки S^1. б) $X = S^n$, $A = S^n \setminus \{a\}$ и $B = S^n \setminus \{b\}$, где a и b — диаметрально противоположные точки S^n. в) $X = \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ (двумерный тор), $A = (S^1 \setminus \{a\}) \times S^1$, $B = (S^1 \setminus \{b\})$, где a и b — диаметрально противоположные точки S^1. г*) $K = [0,1]^2/((x,0) \sim (x,1), (0,y) \sim (1, 1-y))$ (бутылка Клейна); $A = \{(x,y) \in K \mid y \neq 0, 1\}$, $B = \{(x,y) \in K \mid y \neq 1/2\}$. Выпишите последовательность Майера–Виеториса и докажите, что $H_2(K) = 0$. Можно ли вычислить $H_1(K)$, исходя из этой последовательности?

Задача 8. Пусть $X = S^3$, $K \subset X$ — гладкая замкнутая несамопересекающаяся кривая (узел), $A \subset X$ — тонкая трубка вокруг K (гомеоморфная полноторию), $B = X \setminus K$. а) Вычислите последовательность Майера–Виеториса для разбиения $X = A \cup B$ в случае, когда K — незаузленная окружность. б*) Пусть K — произвольный узел. Докажите, что $H_1(B) = \mathbb{Z}$ и предъявите явно образующую этой группы. в*) Докажите, что $H_2(B) = 0$ и вычислите последовательность Майера–Виеториса для произвольного узла K полностью. г) Докажите, что зацепление Хопфа, составленное из окружностей $\omega_1 = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ и $\omega_2 = \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + z^2 = 1\}$, нельзя расцепить. д*) Докажите, что “кольца Борромео” — зацепление, составленное из трех эллипсов $\omega_1 = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 1\}$, $\omega_2 = \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + z^2 = 1\}$ и $\omega_3 = \{(0,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + 2z^2 = 1\}$, нельзя расцепить.

Указание. В задаче 8а представьте S^3 как $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, а K — как $\ell \cup \{\infty\}$, где $\ell \subset \mathbb{R}^3$ — прямая.

Задача 9*. Пусть $S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$, и S^m вложено в S^n как множество $\{(x_0, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \mid x_0^2 + \dots + x_m^2 = 1\}$ (случай $m = 0$ не исключается!). Вычислите точную гомологическую последовательность пары (S^n, S^m).