5. ПОЛУСИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА.

Полусимплициальным множеством называется занумерованное неотрицательными целыми числами семейство множеств $A = (A_n)_{n \geqslant 0}$, снабженных отображениями (*операторами граней*) $\partial_k : A_n \to A_{n-1}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, удовлетворяющими условию $\partial_i \circ \partial_j = \partial_{j-1} \circ \partial_i$ при $i < j$. Элементы множества A_n называются *n-мерными* симплексами полусимплициального множества A. Скажем, что полусимплициальное множество A имеет размерность d, если $A_d \neq \varnothing$, но $A_n = \varnothing$ при $n > d$.

Пусть $\Delta^n = \{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geqslant 0, \sum t_i = 1\}$ — стандартный n-мерный симплекс, и пусть $\delta_k : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ — отображение, задаваемое формулой $\delta_k(t_0, \ldots, t_{n-1}) = (t_0, \ldots, t_{k-1}, 0, t_k, \ldots, t_{n-1})$, $0 \leqslant k \leqslant n$. *Геометрической реализацией* полусимплициального множества A называется факторпространство дизъюнктного объединения прямых произведений $\coprod (A_n \times \Delta^n)$ (где A_n рассматривается как дискретное топологическое пространство) по отношению эквивалентности, порожденному всеми элементарными эквивалентностями вида $(\partial_k(a), t) \sim (a, \delta_k(t))$, где $a \in A_n$, $t \in \Delta^{n-1}$.

Задача 1. Найдите двумерное полусимплициальное множество, имеющее два двумерных симплекса, для которого геометрическая реализация гомеоморфна а) двумерной сфере; б) двумерному тору; в) проективной плоскости; г) бутылке Клейна.

Цепной комплекс $C(A, K)$ полусимплициального множества A с коэффициентами в кольце K состоит из свободных K-модулей $C_n(A, K)$ с базисом A_n, где граничный оператор ∂ задается на базисе формулой $\partial a = \sum_k (-1)^k \partial_k a$.

Задача 2. Докажите, что граничный оператор удовлетворяет условию $\partial^2 = 0$, то есть $C(A, K)$ действительно является комплексом.

Гомологии этого комплекса называются *симплициальными гомологиями* полусимплициального множества A (или, допуская вольность речи, его геометрической реализации).

Задача 3. Используя построенные в задаче 1 полусимплициальные множества, вычислите симплициальные гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ для а) двумерной сферы; б) двумерного тора; в) проективной плоскости; г) бутылки Клейна.

Пусть A — полусимплициальное множество. Скажем, что симплекс $a \in A_n$ является *гранью* симплекса $a' \in A_m$, если $a = \partial_{k_1} \partial_{k_2} \ldots \partial_{k_s} a'$ для некоторых $k_1, \ldots, k_s$. Построим новое полусимплициальное множество B, считая элементами B_n все последовательности $(a_0, \ldots, a_n)$ длины $n+1$, в которых каждый a_i является гранью a_{i+1}, и полагая $\partial_k(a_0, \ldots, a_n) = (a_0, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n)$. Это полусимплициальное множество называется *барицентрическим разбиением* полусимплициального множества A.

Задача 4. а) Докажите, что барицентрическое разбиение полусимплициального множества действительно является полусимплициальным множеством. б) Постройте барицентрическое разбиение одного из полусимплициальных множеств, построенных в задаче 1.

Задача 5. Докажите, что симплициальные гомологии не меняются при переходе к барицентрическому разбиению а) для одномерных полусимплициальных множеств; б) для двумерных полусимплициальных множеств; в) в общем случае.