4. КОМПЛЕКСЫ.

Пусть K — коммутативное ассоциативное кольцо. *Цепным комплексом* K-модулей называется последовательность

$$0 \to C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \to 0,$$

в которой C_i — модули над K, ∂_i — гомоморфизмы модулей, и $\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0$, то есть $\operatorname{Im} \partial_{i+1} \subset \operatorname{Ker} \partial_i$. Фактор-модуль $H_i = \operatorname{Ker} \partial_i / \operatorname{Im} \partial_{i+1}$ называется *i-ми гомологиями* комплекса. Комплекс с нулевыми гомологиями называется *точной последовательностью.* Точная последовательность вида $0 \to A \to B \to C \to 0$ называется *короткой точной последовательностью* или *точной тройкой.*

Задача 1 (эйлерова характеристика)**.** Пусть $K = \mathbb{R}$, $C_i = \mathbb{R}^{n_i}$ и $H_i = \mathbb{R}^{\beta_i}$. Докажите равенство $\sum_{i=0}^n (-1)^i n_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i \beta_i$.

Задача 2 (формула универсальных коэффициентов, простейший случай)**.** Пусть $\xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$ — комплекс абелевых групп (т.е. $\mathbb{Z}$-модулей), в котором $C_i = \mathbb{Z}^{k_i}$ для всех i, а $\xrightarrow{\partial_{i+1}} \tilde{C}_i \xrightarrow{\partial_i} \tilde{C}_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} \tilde{C}_0 \longrightarrow 0$ комплекс векторных пространств (т.е. $\mathbb{R}$-модулей), в котором $\tilde{C}_i = \mathbb{R}^{k_i}$ для всех i, а дифференциалы те же самые (задаются теми же матрицами в стандартных базисах). Докажите, что если $H_i(C) = \mathbb{Z}^{\beta_i} \oplus G_i$, где G_i — конечная абелева группа (кручение), то $H_i(\tilde{C}) = \mathbb{R}^{\beta_i}$.

Задача 3 (5-лемма)**.** Дана коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc}
A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{i} & E \\
p\downarrow & & q\downarrow & & r\downarrow & & s\downarrow & & t\downarrow \\
A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' & \xrightarrow{i'} & E'
\end{array}$$

(коммутативность означает, что имеют место равенства $q \circ f = f' \circ p$ и т.п.). В этой диаграмме строки — точные последовательности, q и s — изоморфизмы, p — эпиморфизм, t — мономорфизм. Докажите, что r — изоморфизм.

Пусть A, B — комплексы, и имеется набор гомоморфизмов

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & \xrightarrow{\partial_{A,i+2}} & A_{i+1} & \xrightarrow{\partial_{A,i+1}} & A_i & \xrightarrow{\partial_{A,i}} & A_{i-1} & \xrightarrow{\partial_{A,i-1}} & \dots \\
 & & \alpha_{i+1}\downarrow & & \alpha_i\downarrow & & \alpha_{i-1}\downarrow & & \\
\dots & \xrightarrow{\partial_{B,i+2}} & B_{i+1} & \xrightarrow{\partial_{B,i+1}} & B_i & \xrightarrow{\partial_{B,i}} & B_{i-1} & \xrightarrow{\partial_{B,i-1}} & \dots
\end{array},$$

в котором все квадраты коммутативны (т.е. имеют место равенства $\alpha_{i-1} \circ \partial_{A,i} = \partial_{B,i} \circ \alpha_i$). В таком случае говорят, что задан *морфизм комплексов* $\alpha : A \to B$.

Задача 4 (морфизм комплексов и цепная гомотопия)**.** а) Пусть задан морфизм комплексов $\alpha : A \to B$. Предположим, что для некоторого $x \in A_i$ выполнено равенство $\partial_{A,i}(x) = 0$; докажите, что $\partial_{B,i}(\alpha_i(x)) = 0$. Также докажите, что если $x = \partial_{A,i+1}(y)$, то $\alpha_i(x) = \partial_{B,i+1}(z)$ для некоторого z. Тем самым, определен набор гомоморфизмов K-модулей $(\alpha_i)_* : H_i(A) \to H_i(B)$ (морфизм гомологий). б) Пусть задан произвольный набор гомоморфизмов K-модулей $\kappa_i : A_i \to B_{i+1}$. Положим $\alpha_i = \partial_{B,i+1} \circ \kappa_i + \kappa_{i-1} \circ \partial_{A,i}$ (сокращенно пишут $\alpha = \partial \circ \kappa + \kappa \circ \partial$). Докажите, что $\alpha : A \to B$ — морфизм комплексов. (Такие морфизмы комплексов называются *цепногомотопными нулевому.*) в) Пусть $\alpha : A \to B$ — морфизм комплексов, цепногомотопный нулевому. Докажите, что соответствующий морфизм гомологий $\alpha_* : H(A) \to H(B)$ — нулевой. г) Пусть $\alpha, \beta : A \to B$ — два морфизма комплексов, причем найдется такой набор гомоморфизмов K-модулей $\kappa_i : A_i \to B_{i+1}$, что $\alpha - \beta = \partial \circ \kappa + \kappa \circ \partial$ (в этом случае морфизмы α и β называются *цепногомотопными*, а набор κ называется *цепной гомотопией* между α и β). Докажите, что $\alpha_* = \beta_*$. д) Пусть заданы морфизмы комплексов $\alpha : A \to B$, $\beta : B \to A$, причем морфизм $\beta \circ \alpha : A \to A$ цепногомотопен тождественному морфизму id_A, а морфизм $\alpha \circ \beta : B \to B$ цепногомотопен тождественному морфизму id_B. Докажите, что $\alpha_* : H(A) \to H(B)$ — изоморфизм гомологий этих комплексов.

Пусть A, B, C — комплексы, и имеется набор гомоморфизмов

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dots & \xrightarrow{\partial_{A,i+2}} & A_{i+1} & \xrightarrow{\partial_{A,i+1}} & A_i & \xrightarrow{\partial_{A,i}} & A_{i-1} & \xrightarrow{\partial_{A,i-1}} & \dots \\
 & & {\scriptstyle\alpha_{i+1}}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_i}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_{i-1}}\downarrow & & \\
\dots & \xrightarrow{\partial_{B,i+2}} & B_{i+1} & \xrightarrow{\partial_{B,i+1}} & B_i & \xrightarrow{\partial_{B,i}} & B_{i-1} & \xrightarrow{\partial_{B,i-1}} & \dots, \\
 & & {\scriptstyle\beta_{i+1}}\downarrow & & {\scriptstyle\beta_i}\downarrow & & {\scriptstyle\beta_{i-1}}\downarrow & & \\
\dots & \xrightarrow{\partial_{C,i+2}} & C_{i+1} & \xrightarrow{\partial_{C,i+1}} & C_i & \xrightarrow{\partial_{C,i}} & C_{i-1} & \xrightarrow{\partial_{C,i-1}} & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

в котором все столбцы — точные последовательности, и все квадраты коммутативны (т.е. задана короткая точная последовательность комплексов $0 \to A \to B \to C \to 0$).

Задача 5. а) Из задачи 4а следует, что определены гомоморфизмы $(\alpha_i)_* : H_i(A) \to H_i(B)$ и $(\beta_i)_* : H_i(B) \to H_i(C)$. Докажите, что $\mathrm{Im}((\alpha_i)_*) = \mathrm{Ker}((\beta_i)_*)$ (то есть последовательность отображений $H_i(A) \xrightarrow{(\alpha_i)_*} H_i(B) \xrightarrow{(\beta_i)_*} H_i(C)$ точна). б) Пусть $\partial_{C,i}(x) = 0$. Докажите, что существует $y \in B_i$ такой, что $\beta_i(y) = x$, и что для всякого такого y существует и единствен $z \in A_{i-1}$ такой, что $\alpha_{i-1}(z) = \partial_{B,i}(y)$. в) Докажите, что $\partial_{A,i-1}(z) = 0$, где элемент z построен в задаче 5б. г) Пусть $y_1, y_2 \in B_i$ таковы, что $\beta_i(y_1) = \beta_i(y_2) = x$, и $z_1, z_2 \in A_{i-1}$ — элементы, построенные по y_1 и y_2 в задаче 5б. Докажите, что существует $u \in A_i$ такой, что $z_1 - z_2 = \partial_{A,i}(u)$. д) Пусть $x = \partial_{C,i+1}(v)$ для некоторого $v \in C_{i+1}$, и пусть $z \in A_{i-1}$ — элемент, построенный по x в задаче 5б. Докажите, что $z = \partial_{A,i}(u)$ для некоторого $u \in A_i$. е) Из задач 5б–5д вытекает, что соответствие $x \mapsto z$ корректно определяет гомоморфизм $\delta : H_i(C) \to H_{i-1}(A)$. Докажите, что последовательность $H_i(B) \xrightarrow{(\beta_i)_*} H_i(C) \xrightarrow{\delta_i} H_{i-1}(A) \xrightarrow{(\alpha_i)_*} H_{i-1}(B)$ точна (и, тем самым, склеивается с последовательностью задачи 5а в “длинную точную последовательность” гомологий).