3. НАКРЫТИЯ II. ТЕОРЕМА ВАН КАМПЕНА.

1. Накрытия над букетом окружностей

Задача 1. Пусть $p : E \to B$ — накрытие. Докажите, что подгруппа $p_*(\pi_1(E, u)) \subset \pi_1(B, b)$ тогда и только тогда *не является* нормальной, когда существуют два отображения $\Gamma_1, \Gamma_2 : [0, 1] \to E$ такие, что $p \circ \Gamma_1 = p \circ \Gamma_2$ является петлей в B, но Γ_1 — петля, а Γ_2 — нет.

Графом называется топологическое пространство, полученное из набора отрезков (конечного или счетного) каким-то отождествлением их концов. Классы эквивалентности концов называются вершинами графа, отрезки — ребрами. Граф *конечный*, если в нем конечное количество вершин и ребер.

Задача 2. а) Пусть A — конечный граф, e — ребро в графе A, не являющееся петлей, и A/e — граф, полученный из A стягиванием ребра e. Докажите, что графы A и A/e гомотопически эквивалентны. б) Докажите, что любой связный конечный граф гомотопически эквивалентен букету окружностей. Как связано число окружностей в букете с числом вершин и ребер графа?

Пусть теперь B — букет двух окружностей, P и Q, с общей точкой b. Рассмотрим пространства (бесконечные графы) E, изображенные на рисунке 1. Для каждого из них определим отображение $p : E \to B$, при котором отмеченные точки (вершины графа) переходят в b, горизонтальные ребра — в окружность P, а петли и вертикальные ребра — в окружность Q.

Задача 3. Докажите, что все три построенных отображения — накрытия.

Указание. Для доказательство необходимо уточнить конструкцию графов: какие именно в них вершины? Какие из них соединены ребрами? Как именно устроено отображение на ребрах? отрезков.

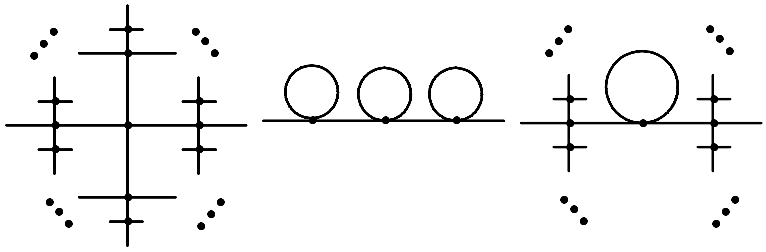
Задача 4. а) Пусть E_n — подмножество графа a, состоящее из вершин, соединенных с центральной вершиной путем, состоящим не более чем из n ребер, и из всех ребер с концами в таких вершинах. Докажите, что E_n — стягиваемое топологическое пространство (т.е. существует гомотопия $f_t : E_n \to E_n$, $0 \le t \le 1$, такая, что f_0 — тождественное отображение, а образ f_1 переводит E_n в одну точку — центральную вершину). Отсюда вытекает (почему?), что группа $\pi_1(E_n)$ тривиальна. б) Докажите, что группа $\pi_1(E)$ тривиальна. в) Выведите из результатов задачи 3 и пункта 4б, что фундаментальная группа букета из двух окружностей — свободная группа с двумя образующими (обозначается $\mathcal{F}_2$).

Аналогично доказывается (как?), что фундаментальная группа букета из k окружностей — свободная группа $\mathcal{F}_k$ с k образующими.

Задача 5. а) Вычислите подгруппу $p_*(\pi_1(E))$ для графа b. Нормальна ли эта подгруппа? Если нет, то укажите в графе пути Γ_1 и Γ_2, удовлетворяющие условию задачи 1. Опишите $\pi_1(E)$. б) Те же вопросы про граф c.

Задача 6. Топологическое пространство Γ является связным n-листным накрытием букета из k окружностей. Докажите, что Γ гомеоморфно конечному графу, и найдите число вершин и ребер этого графа.

Задача 7. Используя результаты задач 2 и 6, докажите, что если группа G является подгруппой свободной группы $\mathcal{F}_k$ с k образующими, и индекс $|\mathcal{F}_k : G| = n$ конечен, то G изоморфна свободной группе $\mathcal{F}_p$. Выразите число p через n и k. Продумайте возможность чисто алгебраического доказательства этого утверждения.



a b c

Рис. 1. Накрытия над букетом двух окружностей

Задача 8. а) Докажите, что множество $X = \{a, b\}$, на котором открытыми считаются подмножества $\varnothing$, $\{a\}$ и X — топологическое пространство. Опишите непрерывные отображения $X \to \mathbb{R}$ и $\mathbb{R} \to X$. Верно ли, что X стягиваемо? (гомотопически эквивалентно точке) б) Пусть R — частично упорядоченное множество. Назовем подмножество $A \subset R$ замкнутым, если для любых точек $a \in A$ и $b \leq a$ верно, что $b \in A$. Докажите, что таким образом на R определена топология. в) Приведите пример конечного топологического пространства с нетривиальной фундаментальной группой.

Задача 9. Вычислите фундаментальную группу следующих пространств с помощью теоремы ван Кампена и, если возможно, также с помощью накрытий: а) S^n, $n \geq 2$; б) $S^1 \vee \cdots \vee S^1$ (букет n окружностей); в) $\mathbb{R}P^2$; г) $\mathbb{R}P^n$; д) сфера с g ручками; е) $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}/(z, w) \sim (ze^{2\pi i/3}, we^{-2\pi i/3})$; ж) $G(2, 4, \mathbb{R})$; з) дополнение в $\mathbb{R}^3$ к окружностям $\omega_1 = \{(x, y, 0) \mid (x-2)^2 + y^2 = 1\}$ и $\omega_2 = \{(x, y, 0) \mid (x+2)^2 + y^2 = 1\}$; и) дополнение в $\mathbb{R}^3$ к окружностям $\omega_1 = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ и $\omega_2 = \{(x, 0, z) \mid (x-1)^2 + z^2 = 1\}$.