2. ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ. НАКРЫТИЯ I.

Задача 1. Докажите, что следующие пары пространств гомотопически эквивалентны. Какие из них гомеоморфны? а) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и S^{n-1}; б) $S^1 \times S^1 \setminus \{a\}$ (двумерный тор без точки) и $S^1 \vee S^1$ (букет двух окружностей: две окружности, склеенные по одной точке); в) лента Мебиуса $M \stackrel{\text{def}}{=} [0,1]^2/\big((x,0) \sim (1-x,1) \forall x \in [0,1]\big)$ и окружность; г) две окружности, соединенные отрезком, и окружность с диаметром; д) $\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{R}P^2 \mid x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 \geq 0\}$ и лента Мебиуса; е) $\mathbb{C}P^1$ и S^2; ж) $\{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{C}P^n \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 \neq 0\}$ и $\mathbb{R}P^n$.

Задача 2. а) Отображение $f : S^n \to \mathbb{R}P^n$ ставит в соответствие точке A единичной сферы $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ с центром в начале координат O прямую OA. Докажите, что f — двулистное накрытие. Вычислите $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$. б) Постройте двулистное накрытие $g : C \to M$, где $C = S^1 \times [0,1]$ — цилиндр, а M — лента Мебиуса. в) Докажите, что $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$ и вычислите гомоморфизм фундаментальных групп $g_* : \pi_1(C) \to \pi_1(M)$, где g — отображение пункта 2б. г) Пусть $L \subset S^2$ — окрестность экватора (от 10° южной до 10° северной широты). Докажите, что образ $f(L) \subset \mathbb{R}P^2$, где f — отображение пункта 2а (при $n = 2$), гомеоморфен ленте Мебиуса, а накрытие $f : L \to f(L)$ эквивалентно накрытию g пункта 2б.

Действием группы G на топологическом пространстве X называется гомоморфизм G в группу гомеоморфизмов X. Иными словами, действие T сопоставляет каждому элементу $g \in G$ гомеоморфизм $T(g) : X \to X$ так, что $T(gh) = T(g)T(h)$, $T(e) = \mathrm{id}_X$ и $T(g^{-1}) = T(g)^{-1}$. Действие T называется точно дискретным, если для всякого $a \in X$ найдется окрестность U такая, что множества $T(g)U$ для различных $g \in G$ не пересекаются.

Задача 3. а) Докажите, что естественное отображение X в пространство орбит точно дискретного действия T (каждой точке сопоставляется ее орбита) является накрытием. б) Докажите, что если X линейно связно и односвязно, то фундаментальная группа пространства орбит изоморфна G.

Задача 4. Докажите, что следующие действия групп — точно дискретные, и опишите пространства орбит: а) действие $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ на S^n: элемент $x \neq 0$ переводит каждую точку сферы в противоположную; б) действие $\mathbb{Z}^n$ на $\mathbb{R}^n$ параллельными переносами на векторы с целыми координатами; в) действие на $\mathbb{R}^2$ группы, порожденной параллельным переносом $T(x,y) = (x+1, y)$ (на единичный вектор вдоль оси абсцисс) и скользящей симметрией $S(x,y) = (-x, y+1)$ (относительно оси ординат, сдвиг на единичный вектор).

Задача 5. а) Докажите, используя задачу 4в, что группа $\pi_1(K)$, где K — бутылка Клейна, бесконечна и некоммутативна. б) Докажите, что $\pi_1(K)$ порождена двумя образующими a и b, связанными единственным соотношением $abab^{-1} = 1$. в) Постройте двулистное накрытие $g : \mathbb{T}^2 \to K$ и опишите подгруппу (индекса 2) $g_*(\pi_1(\mathbb{T}^2)) \subset \pi_1(K)$.

Пусть $X_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^2)^n \mid x_i \neq x_j \forall i \neq j\}$. На X_n действует перестановками точек группа S_n, обозначим Y_n пространство орбит.

Задача 6. а) Докажите, что X_2 и Y_2 гомотопически эквивалентны окружности. б) Пусть $f : X_n \to X_{n-1}$ задано формулой $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Докажите, что $f_* : \pi_1(X_n) \to \pi_1(X_{n-1})$ — эпиморфизм. в) Докажите, что действие группы S_n на X_n точно дискретно (и, следовательно, естественная проекция $X_n \to Y_n$ — накрытие). г) Выведите из результатов задач 6б и 6в, что $\pi_1(Y_3)$ бесконечна и некоммутативна.