1. ОТОБРАЖЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ В ОКРУЖНОСТЬ.

В дальнейшем S^1 — окружность: $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$, и $E : \mathbb{R} \to S^1$ — отображение, заданное формулами $E(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = e^{2\pi i t}$.

Задача 1. Докажите, что S^1 гомеоморфна а) факторпространству $[0,1]/(0 \sim 1)$; б) факторпространству $\mathbb{R}/(x \sim (x+1)\,\forall x \in \mathbb{R})$.

Задача 2. Докажите, что отображение $f : [0,1) \to S^1$, заданное формулой $f(t) = e^{2\pi i t}$, непрерывно, взаимно однозначно, но не является гомеоморфизмом.

Задача 3 (теорема о накрывающей гомотопии)**.** а) Пусть $f : S^1 \to S^1$ — непрерывное отображение. Докажите, что существует непрерывное отображение $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (называемое поднятием f) такое, что $f \circ E = E \circ F$. б) Пусть $f_t : S^1 \to S^1$ — гомотопия, т.е. семейство непрерывных отображений, непрерывно зависящее от $t \in [0,1]$. Докажите, что существует семейство непрерывных отображений $F_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, непрерывно зависящее от t и такое, что F_t — поднятие f_t для всех t.

Задача 4. а) Пусть $F_1, F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — два поднятия одного и того же отображения f. Докажите, что $F_1(t) - F_2(t) = const.$, причем константа — целое число. б) Пусть F — поднятие отображения f. Докажите, что $F(t+1) - F(t) = const.$, причем константа — целое число и не зависит от выбора поднятия. Константа обозначается $\deg f$ и называется степенью отображения f. в) Докажите, что если отображения $f_0 : S^1 \to S^1$ и $f_1 : S^1 \to S^1$ гомотопны, то $\deg f_0 = \deg f_1$. г) Докажите, что если $\deg f_0 = \deg f_1$, то отображения f_0 и f_1 гомотопны; при этом если $f_0(1) = f_1(1) \overset{\text{def}}{=} a$, то можно подобрать гомотопию f_t так, чтобы $f_t(1) = a$ для всех t.

Указание (к пункту 4г)**.** Рассмотрите поднятия F_0 и F_1 отображений f_0 и f_1 такие, что $F_0(0) = F_1(0)$, и придумайте гомотопию между ними.

Задача 5. Докажите, что $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$, где $f, g : S^1 \to S^1$.

Задача 6. Пусть $n \in \mathbb{Z}$, и отображение $f : S^1 \to S^1$ задано формулой $f(z) = z^n$. Постройте явно поднятие отображения f и докажите, что $\deg f = n$.

Задача 7 (теорема Брауэра в размерности 1)**.** а) Пусть $f : [0,1] \to [0,1]$ — непрерывное отображение. Докажите, что существует точка $x \in [0,1]$ такая, что $f(x) = x$. б) Верна ли аналогичная теорема с заменой отрезка $[0,1]$ на интервал $(0,1)$? а на прямую $\mathbb{R}$?

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — единичный замкнутый круг с центром в начале координат, $f : D \to D$ — непрерывное отображение.

Теорема (теорема Брауэра в размерности 2)**.** *Существует $x \in D$ такое, что $f(x) = x$.*

Докажем теорему от противного: пусть $f : D \to D$ — отображение, для которого она неверна. Определим тогда непрерывное отображение $g : D \to S^1$ формулой $g(x) = \frac{f(x)-x}{|f(x)-x|}$, а гомотопию $u_s : S^1 \to S^1$, $0 \le s \le 1$, — формулой $u_s(t) = g(s \cos 2\pi t, s \sin 2\pi t)$.

Задача 8. а) Докажите, что u_s — действительно гомотопия и, следовательно, степень $\deg u_s$ не зависит от s. б) Докажите, что $\deg(u_0) = 0$. в) Докажите, что u_1 гомотопна тождественному отображению $\mathrm{id} : S^1 \to S^1$. г) Выведите из результатов пунктов 8а–8в теорему Брауэра в размерности 2.

Теорема (основная теорема алгебры)**.** *Всякий многочлен вида $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ с комплексными коэффициентами $a_{n-1}, \dots, a_0$ имеет по крайней мере один корень.*

Докажем теорему от противного: пусть многочлен P не имеет корней. Определим гомотопию u_s^P равенством $u_s^P(z) = P(sz)/|P(sz)|$, где $z \in S^1$ и $s \in [0,\infty)$. Это, очевидно, гомотопия, так что $\deg u_s^P$ не зависит от s.

Задача 9. а) Докажите, что $\deg(u_0^P) = 0$. б) Докажите, что при достаточно большом s отображение u_s^P гомотопно отображению $u_s^{P_0}$, где $P_0(z) = z^n$. в) Докажите, что $\deg u_s^P = n$ при достаточно большом s. Выведите отсюда основную теорему алгебры.

Указание (к пункту 9б)**.** Рассмотрите гомотопию $u_s^{P_t}$, где $P_t = (1-t)P + tP_0$, $0 \le t \le 1$. При $|z| = R \gg 1$ имеем $|z^n| \gg |a_k z^k|$ для всех $0 \le k \le n-1$, откуда вытекает, что при $s \gg 0$ указанная гомотопия определена.

Задача 10. Пусть $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, для которой $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. а) Пусть $f'(x) > 0$. Докажите, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство $f(x-\varepsilon) < f(x) < f(x+\varepsilon)$. б) Пусть $c \in \mathbb{R}$ — регулярное значение f (т.е. если $f(x) = c$, то $f'(x) \neq 0$). Докажите, что каждая точка множества $f^{-1}(c) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in [0,1] \mid f(x) = c\}$ изолирована. в) Докажите, что множество $f^{-1}(c) \subset [0,1]$ конечно. г) Докажите, что число $\deg_c f \stackrel{\text{def}}{=} \#\{x \in [0,1] \mid f(x) = c, f'(x) > 0\} - \#\{x \in [0,1] \mid f(x) = c, f'(x) < 0\}$ равно 1, если $0 < c < 1$, и равно 0 при $c < 0$ и $c > 1$.

Непрерывное отображение $f : S^1 \to S^1$ называется гладким, если его поднятие $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ гладкое. Из задачи 4а вытекает, что от выбора поднятия гладкость не зависит. Точка $x \in S^1$ называется некритической для отображения f, если $F'(t) \neq 0$ для какого-нибудь $t \in \mathbb{R}$ такого, что $E(t) = x$. Точка $c \in S^1$ называется регулярным значением f, если $f^{-1}(c)$ состоит целиком из некритических точек.

Задача 11. Пусть $E(s) = E(t) = x$, а F — поднятие гладкого отображения f. Докажите, что если $F'(t) \neq 0$, то и $F'(s) \neq 0$; более того, знаки чисел $F'(t)$ и $F'(s)$ одинаковы.

Если $F'(t) > 0$, то говорят, что f сохраняет ориентацию в точке x, а если $F'(t) < 0$, — что меняет.

Задача 12. Пусть $c \in S^1$ — регулярное значение f. а) Докажите, что множество $f^{-1}(c) \subset S^1$ конечно. б) Докажите, что величина $\deg_c f \stackrel{\text{def}}{=} \#\{x \in S^1 \mid f(x) = c, f \text{ сохраняет ориентацию в } x\} - \#\{x \in S^1 \mid f(x) = c, f \text{ меняет ориентацию в } x\}$ равна $\deg f$ (в частности, не зависит от c).