7 Модели гиперболической геометрии

Литература

1. М. Берже, Геометрия, т. 2, часть 4, гл. 19.
2. В. В. Прасолов, Геометрия Лобачевского.

Лекция

Риманова метрика на гиперболоиде. Отражения. Группа $SO(n,1)$, как группа движений гиперболического пространства. Модель Клейна. Модель Пуанкаре. Отражения в модели Пуанкаре — инверсии. Модель Пуанкаре конформна.

Вопросы к семинару

1. Верхняя компонента гиперболоида $-x_0^2+x_1^2+\cdots+x_n^2=-1$ проецируется на плоскость $x_0=0$ из точки $(-1,0,\ldots,0)$, что отождествляет ее с внутренностью единичного диска. Найдите функции перехода от этих координат к координатам, доставляемым моделью Клейна. (Достаточно рассмотреть случай $n=1$).
2. Напишите явно функции перехода от модели Пуанкаре к модели Клейна. Сравните с предыдущей задачей.
3. Покажите, что $SO(2,1)=PSL_2(\mathbb{R})$. Как это увидеть из действия группы движений гиперболической плоскости на абсолюте?
4. Найдите дробно линейное преобразование $\mathbb{CP}^1$, переводящее область $|z|<1$ в область $\operatorname{Im} z>0$.
5. Покажите, что при отождествлении внутренности единичного круга с верхней полуплоскостью из предыдущей задачи, действие движений гиперболической плоскости в модели Пуанкаре переходит в естественное действие $PSL_2(\mathbb{R})$ на верхней полуплоскости.