Динамические системы — II

Листок 8

Сданные задачи учитываются на коллоквиуме.

1. Пусть $f_0, f_1 : X \to Y$ — гомотопные гладкие отображения многообразий, и пусть $F\colon [0,1] \times X \to Y$ — гладкая гомотопия между ними.

   (a) Обозначим через $\Omega_1^k([0,1] \times X)$ подпространство в $\Omega^k([0,1] \times X)$, состоящее из всех форм μ таких, что $\mu(v_1, \dots, v_k) = 0$ для $v_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ и любых векторных полях $v_2, \dots, v_k$ (здесь t — координата на отрезке $[0,1]$ — первом сомножителе в произведении $[0,1] \times X$. Докажите, что пространство $\Omega^k([0,1] \times X)$ разлагается в прямую сумму подпространств $\Omega_1^k([0,1] \times X)$ и $dt \wedge \Omega_1^{k-1}([0,1] \times X)$, причем в локальных координатах $(x_1, \dots, x_n)$ на X компоненты в разложении формы μ относительно этой прямой суммы выглядят так: $\mu = \mu_1 + dt \wedge \mu_2$, где $\mu_1 = \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n} a_{i_1 \dots i_k}(t,x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, $\mu_2 = \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_{k-1} \leqslant n} b_{i_1 \dots i_{k-1}}(t,x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}}$ для некоторых функций $a_{i_1 \dots i_k}(t,x), b_{i_1 \dots i_{k-1}}(t,x)$.

   (b) Обозначим через A линейный оператор $\Omega^k([0,1] \times X) \to \Omega_1^{k-1}([0,1] \times X)$, сопоставляющий каждой форме μ форму μ_2, определенную в предыдущем пункте. Для произвольной дифференциальной формы $\omega \in \Omega^k Y$ рассмотрим ее обратный образ $F^*\omega \in \Omega^k([0,1] \times X)$ и применим к нему оператор A. Форму $AF^*\omega$ можно рассматривать как семейство форм из $\Omega^{k-1} X$, параметризованное параметром $t \in [0,1]$. Положим $h\omega = \int_0^1 AF^*\omega dt$. Докажите, что таким образом определяется линейный оператор $h\colon \Omega^k Y \to \Omega^{k-1} X$ (для всех k), удовлетворяющий соотношению $d \circ h + h \circ d = f_1^* - f_0^*$.

   (c) Докажите, что отображения когомологий де Рама $f_0^*, f_1^*\colon H^k(Y) \to H^k(X)$ равны (для любого k).

   (d) Докажите, что если многообразия гладко гомотопически эквивалентны, то их когомологии де Рама естественно изоморфны.

2. Найдите когомологии плоскости с s выколотыми точками.

3. Найдите когомологии n-мерной сферы S^n.

4. Найдите когомологии n-мерного тора $\mathbb{T}^n = (S^1)^n$.

5. * Найдите когомологии n-мерного пространства с s выколотыми точками.

6. * Говорят, что открытое покрытие многообразия X хорошее, если пересечение любого непустого набора открытых множеств, входящих в покрытие, либо стягиваемо, либо пусто. Докажите, что если многообразие X имеет конечное хорошее покрытие, а Y — произвольное гладкое многообразие, то верна *формула Кюннета*: $H^k(X \times Y) \cong \bigoplus H^m(X) \otimes H^{k-m}(Y)$.

7. * Докажите, что если многообразие X имеет конечное хорошее покрытие, то его когомологии — конечномерные векторные пространства.