Динамические системы — II

Листок 7

Сданные задачи учитываются на коллоквиуме.

1. Докажите, что для любых векторных полей u, v, w выполняется *тождество Якоби* $[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0$.

2. Пусть $G = SO_3$ — группа ортогональных 3×3 матриц с определителем 1 (для тех, кому надоели ортогональные матрицы, пусть $G = SU_2$ — группа унитарных 2×2 матриц с определителем 1; или, на худой конец, пусть $G = SL_2(\mathbb{R})$ — группа всех вещественных 2×2 матриц с определителем 1).

   (a) Докажите, что G — замкнутое трехмерное подмногообразие в пространстве всех матриц. Найдите касательное пространство $T_E G$ в единице группы G как подпространство в пространстве всех матриц.

   (b) Докажите, что каждый касательный вектор $A \in T_E G$ продолжается, причем однозначно, до *левоинвариантного векторного поля* на G, то есть до такого поля v_A, что $v_A(gh) = g_* v_A(h)$ для любых $g, h \in G$, где g_* — производная отображения $G \to G$, переводящего каждый элемент $h \in G$ в gh.

   (c) * Докажите, что каждому левоинвариантному векторному полю v_A отвечает однопараметрическая группа диффеоморфизмов $\varphi_\tau : G \to G$, определенных для всех $\tau \in \mathbb{R}$, и выразите φ_τ через A.

   (d) * Пусть $A, B \in T_E G$ — два касательных вектора, записанные как матрицы. Найдите коммутатор соответствующих левоинвариантных векторных полей $[v_A, v_B]$.

3. Найдите производную Ли от формы dx вдоль векторного поля $x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$.

4. (a) Опишите все такие векторные поля v на плоскости с координатами (x, y), что производная Ли $L_v t$ от симметрического тензора $t = dx^2 + dy^2$ равна нулю.

   (b) * Опишите все такие векторные поля v на верхней полуплоскости с координатами (x, y), что производная Ли $L_v t$ от симметрического тензора $t = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$ равна нулю.

5. Рассмотрим на $\mathbb{R}^2$ форму $\omega = dx \wedge dy$.

   (a) Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — поворот. Покажите, что $f^*\omega = \omega$.

   (b) Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — произвольное движение, сохраняющее ориентацию. Покажите, что $f^*\omega = \omega$.

   (c) Что будет, если в условиях предыдущей задачи движение ориентацию не сохраняет?

6. Рассмотрим на $\mathbb{R}^3$ форму $\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$.

   (a) Пусть $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ — сфера радиуса 1 с центром в начале координат, и пусть $i : S^2 \to \mathbb{R}^3$ — тождественное вложение. В каких точках сферы S^2 форма $i^*\omega$ обращается в нуль?

   (b) Пусть $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ — ортогональное преобразование. Что можно сказать про форму $f^*\omega$?

7. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ форму

$$\omega = x_1 dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n - x_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_n + \cdots + (-1)^{n-1} x_n dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}.$$

   (в k-м слагаемом пропущено dx_k и имеется коэффициент x_k, знаки чередуются). Докажите, что ограничение ω на единичную сферу совпадает с формой объема на ней.