

Динамические системы — II

Листок 6

Сданные задачи учитываются на коллоквиуме.

1. Докажите, что если две поверхности касаются вдоль кривой, то результат параллельного переноса касательного вектора вдоль этой кривой на обеих поверхностях одинаков.
2. На какой угол повернется касательный вектор к двумерной сфере после параллельного переноса вдоль параллели $\theta = \theta_0$?
3. Для поверхности вращения найдите результат параллельного переноса вдоль параллелей и меридианов. При каких условиях параллель является геодезической? А меридиан?
4. Докажите, что если прямая лежит на поверхности, то она является геодезической.
5. Докажите, что если две поверхности в \mathbb{R}^3 трансверсально пересекаются по кривой, являющейся геодезической на каждой из них, то эта кривая является прямой.
6. На единичной сфере найдите длину окружности и площадь круга радиуса ρ (радиус отсчитывается по геодезической).
7. Пусть $G : M \rightarrow S^2$ — отображение Гаусса, $x \in M$, и $p : T_{G(x)}S^2 \rightarrow T_xM$ — параллельный перенос в \mathbb{R}^3 . Докажите соотношение $(pG_*\xi, \xi) = h_x(\xi)$, где $\xi \in T_xM$, а $h_x(\xi)$ — вторая квадратичная форма в точке x .
8. Найдите кривизну следующих метрик:
 - (a) $dx^2 + \sin^2 x dy^2$;
 - (b) $\frac{4}{(1 + (x^2 + y^2))^2} (dx^2 + dy^2)$;
 - (c) $A(x, y)^2 dx^2 + B(x, y)^2 dy^2$, $A > 0$, $B > 0$.
9. Найдите поверхность вращения в \mathbb{R}^3 , гауссова кривизна которой во всех точках равна -1 (эта поверхность называется *псевдосферой Бельтрами*).