Динамические системы — II

Листок 5

Сданные задачи учитываются на коллоквиуме.

1. Множество центров кривизны плоской кривой называется ее *эволютой.*
   (a) Докажите, что особенности эволюты соответствуют экстремумам кривизны.
   (b) Докажите, что в неособой точке эволюта касается нормали к кривой (то есть эволюта — огибающая семейства нормалей).
   (c) Докажите, что в точках экстремума кривизны порядок касания соприкасающейся окружности не ниже третьего.
   (d) Найдите экстремумы кривизны для параболы и эллипса.
   (e) Нарисуйте эволюты параболы и эллипса.

2. Найдите формулы для кривизны и кручения пространственной кривой $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ через производные функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$. Параметр t не обязательно является натуральным.

3. Докажите, что если кривизна пространственной кривой тождественно равна нулю, то это прямая, а если кручение пространственной кривой тождественно равно нулю, то эта кривая лежит в некоторой плоскости.

4. Опишите кривые с постоянными кривизной и кручением.

5. Докажите, что если кривая лежит на сфере и имеет постоянную кривизну, то эта кривая — окружность.

6. (a) Докажите, что если кривая с ненулевой кривизной k и ненулевым кручением $\varkappa$ лежит на сфере радиуса R, то выполнено тождество
   $$R^2 = \frac{1}{k^2}\left(1 + \frac{(k')^2}{(\varkappa k)^2}\right) \ ,$$
   где штрихом обозначена производная по натуральному параметру.
   (b) Докажите, что если $k' \neq 0$, то верно и обратное: если выполнено тождество из пункта а), то кривая лежит на некоторой сфере радиуса R.

7. Запишите евклидову метрику $dx^2 + dy^2$ на плоскости в полярных координатах.

8. Найдите первую и вторую квадратичные формы, главные кривизны, среднюю кривизну, гауссову кривизну
   (a) для сферы радиуса R;
   (b) для тора в $\mathbb{R}^3$, полученного вращением окружности с уравнениями $(x-2)^2 + z^2 = 1$, $y = 0$ вокруг оси Oz;
   (c) для произвольной поверхности вращения $\mathbf{r}(u, \varphi) = (\rho(u)\cos\varphi, \rho(u)\sin\varphi, z(u))$.

9. В окрестности точки x поверхности $M \subset \mathbb{R}^3$ рассмотрим касательную прямую l, образующую угол α с одним из главных направлений. Определите кривизну в точке x у кривой, высекаемой на поверхности плоскостью λ, проходящей через прямую l, если
   (a) λ проходит через нормаль к M в точке x;
   (b) λ образует угол β с нормалью.