

ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
факультет математики

Динамические системы — II
Зачет 27 марта 2014 г.

ВАРИАНТ 1

1. Частица массы 1 движется по прямой в поле с потенциальной энергией $U(x) = -e^{3x} + 5e^{2x} - 8e^x$.
 - (a) Нарисуйте качественный фазовый портрет данной механической системы.
 - (b) Для какого значения механической энергии частицы $E = E_0$ число фазовых траекторий максимально? Чему равно это максимальное число фазовых траекторий?
 - (c) Для всех ли траекторий при $E = E_0$ движение частицы определено при всех $t \in (-\infty, \infty)$? Если да — докажите, если нет — опишите траектории, для которых это не выполнено, и объясните, почему.

2. По горизонтальной прямой движется точка массой $m_1 = 1$, прикрепленная к пружине с коэффициентом жесткости $k = 1$. К этой точке прикреплен маятник, то есть невесомый стержень длины 1, к концу которого прикреплена точка массой $m_2 = 4$. Маятник движется в вертикальной плоскости под действием силы тяжести с ускорением свободного падения $g = 1$.
 - (a) Составьте лагранжиан системы и выпишите уравнения Эйлера–Лагранжа.
 - (b) Найдите периоды собственных малых колебаний в окрестности точки минимума потенциальной энергии.

3. Рассмотрим сферический маятник на единичной сфере (считаем $m = 1$, $g = 1$) в сферических координатах $q_1 = \theta$, $q_2 = \varphi$ (т.е. $x = \sin \theta \cos \varphi$, $y = \sin \theta \sin \varphi$, $z = \cos \theta$). Пусть p_1, p_2 — соответствующие обобщенные импульсы.
 - (a) Напишите для этой механической системы функцию Гамильтона $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ и соответствующие канонические уравнения.
 - (b) Напишите два независимых первых интеграла системы канонических уравнений.

ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
факультет математики

Динамические системы — II
Зачет 27 марта 2014 г.

ВАРИАНТ 2

1. Частица массы 1 движется по прямой в поле с потенциальной энергией $U(x) = -e^{3x} + 4e^{2x} - 4e^x$.
 - (a) Нарисуйте качественный фазовый портрет данной механической системы.
 - (b) Для какого значения механической энергии частицы $E = E_0$ число фазовых траекторий максимально? Чему равно это максимальное число фазовых траекторий?
 - (c) Для всех ли траекторий при $E = E_0$ движение частицы определено при всех $t \in (-\infty, \infty)$? Если да — докажите, если нет — опишите траектории, для которых это не выполнено.

2. По горизонтальной прямой движется точка массой $m_1 = 4$, прикрепленная к пружине с коэффициентом жесткости $k = 3$. К этой точке прикреплен маятник, то есть невесомый стержень длины 1, к концу которого прикреплена точка массой $m_2 = 1$. Маятник движется в вертикальной плоскости под действием силы тяжести с ускорением свободного падения $g = 1$.
 - (a) Составьте лагранжиан системы и выпишите уравнения Эйлера–Лагранжа.
 - (b) Найдите периоды собственных малых колебаний в окрестности точки минимума потенциальной энергии.

3. Рассмотрим сферический маятник на единичной сфере (считаем $m = 1$, $g = 1$) в полярных координатах для стереографической проекции $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$ (т.е. $x = \frac{2r \cos \varphi}{r^2 + 1}$, $y = \frac{2r \sin \varphi}{r^2 + 1}$, $z = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$). Пусть p_1, p_2 — соответствующие обобщенные импульсы.
 - (a) Напишите для этой механической системы функцию Гамильтона $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ и соответствующие канонические уравнения.
 - (b) Напишите два независимых первых интеграла системы канонических уравнений.