Динамические системы — II

Листок 4

В скобках указано число баллов за задачу.

1. (1) Найдите частоту малых колебаний бусинки массы 1 на проволоке $y = f(x)$ вблизи положения равновесия $x = x_0$, отвечающего минимуму функции f.

2. (1) Докажите, что движение бусинки по проволочному графику функции f эквивалентно движению в некоторой одномерной системе с функцией Лагранжа $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - U(q)$.

3. (2) На абсолютно скользкий плоский стол ставят однородный стержень длины l и массы m под углом в 60° к поверхности стола и отпускают без начальной скорости. Найдите силу реакции стола в начальный момент времени.

4. (2) Пусть лагранжиан инвариантен относительно однопараметрической группы винтовых сдвигов. Какой интеграл движения соответствует этой инвариантности?

5. (2) Пусть два одинаковых плоских маятника длин $l_1 = l_2 = 1$ с массами $m_1 = m_2 = 1$ связаны пружиной с потенциальной энергией $U = \frac{\alpha}{2}(q_1 - q_2)^2$, где обобщенные координаты q_i — углы отклонения маятников. Найдите собственные (малые) колебания системы.

6. (2) В условиях предыдущей задачи, пусть пружина очень слабая ($\alpha \ll 1$). Предположим, что в начальный момент времени второй маятник покоится, а первый проходит положение равновесия со скоростью v. Докажите, что через некоторый (большой) промежуток времени T первый маятник будет почти неподвижен, а второй будет проходить свое положение равновесия со скоростью, мало отличающейся от v.

7. (4) На систему с функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}\sum(m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - k_{ij}q_iq_j)$$

наложена линейная связь $\sum a_iq_i = 0$. Предположим, что все собственные частоты Ω_i исходной системы различны. Докажите, что собственные частоты ω_i системы со связью перемежаются с ними:

$$\Omega_1 \leqslant \omega_1 \leqslant \Omega_2 \leqslant \omega_2 \leqslant \ldots \leqslant \Omega_{n-1} \leqslant \omega_{n-1} \leqslant \Omega_n.$$