

Динамические системы — II

Листок 3

В скобках указано число баллов за задачу.

После 1 марта 2014 года для задач 1–3 число баллов уменьшается вдвое.

1. Зная ускорение силы тяжести на поверхности Земли ($g = 9.8\text{м/сек}^2$) и радиус Земли (примерно 6400 километров),
 - (а) (1) найдите вторую космическую скорость, то есть минимальную скорость, которую надо придать телу на поверхности Земли, чтобы его траектория была неограничена (сопротивлением воздуха и влиянием других космических тел мы пренебрегаем).
 - (б) (1) найдите первую космическую скорость, то есть скорость кругового движения в поле земного тяготения на уровне поверхности Земли (сопротивлением воздуха и наличием неровностей земной поверхности мы пренебрегаем). Чему равно отношение первой и второй космической скорости?
2. (2) Определите время падения частицы с радиуса R в центр поля с потенциалом $U(r) = -k/r$ (начальная скорость равна 0). Как это время соотносится со временем движения по круговой орбите радиуса R ?
3. (2) Частица падает в центр поля $U(r) = -\frac{k}{r^n}$ с конечного расстояния (с ненулевым кинетическим моментом). При каких n число оборотов вокруг центра будет конечным? При каких n время падения будет конечным?
4. (1) Пусть частица движется в центральном поле с потенциалом $U(r)$. Предположим, что траектория движения ограничена, причем $r(t)$ (расстояние от частицы до центра) не имеет предела при $t \rightarrow +\infty$. Докажите, что $r(t)$ — периодическая функция.
5. (2) В условиях задачи 4, пусть масса частицы равна 1, длина вектора кинетического момента равна M , а полная энергия равна E . Докажите, что между двумя максимумами $r(t)$ частица поворачивается вокруг центра на угол Φ , равный периоду колебаний одномерной системы с потенциалом $W(x) = U\left(\frac{M}{x}\right) + \frac{x^2}{2}$ и той же полной энергией E .
6. (2) В условиях задачи 5, найдите угол Φ для орбиты, близкой к круговой радиуса r_0 (через значения производных функции $U(r)$ в точке r_0).
7. (4) Найдите все центральные поля, для которых существуют ограниченные орбиты с непостоянным радиусом $r(t)$, причем все они замкнуты.