

Динамические системы — II

Листок 2

В скобках указано число баллов за задачу.

После 15 февраля 2014 года для задач 1–4 число баллов уменьшается вдвое.

1. (a) (1) Имеется (замкнутая или уходящая на бесконечность) речка C (гладкая кривая), а также пункты A и B (точки). Пускай отрезок, соединяющий A и B , не пересекает речку. Докажите, что кратчайший путь из пункта A в пункт B , задевающий речку, задевает ее по правилу “угол падения равен углу отражения”.
(b) (1) Напомним, что эллипс — геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух фокусов A и B — константа. Покажите, что касательная к эллипсу в точке p имеет равный угол с pA и pB .
2. (a) (1) Пускай имеется гладкая кривая C , разделяющая плоскость на две части; по одной из частей частица движется со скоростью v_1 , по другой — со скоростью v_2 . Рассмотрим кратчайший (по времени) путь, соединяющий две точки A и B . Как могут быть устроены его изломы на кривой C ?
Обычно это условие называют законом преломления, так как принцип наименьшего действия в геометрической оптике (в которой он и был впервые открыт) формулируется так: лучи света движутся по траекториям с минимальным временем путешествия.
(b) (2) Пускай скорость света в точке (x, y) — это $v(x, y)$. Выпишите уравнения траекторий световых лучей в такой неоднородной среде.
3. (1) Докажите, что для свободно движущейся частицы экстремали действия доставляют его минимальное значение.
4. Рассмотрим поверхность вращения в \mathbb{R}^3 , заданную в цилиндрических координатах (r, φ, z) уравнением $r = r(z)$.
(a) (1) Напишите уравнение геодезических на поверхности.
(b) (1) Найдите его первые интегралы.
(c) (2) Выразите решение уравнения геодезических (зависимость между z и φ) в квадратурах.
(d) (2) Пусть ψ — угол между геодезической и горизонтальной окружностью на поверхности вращения. Докажите, что величина $r \cos \psi$ постоянна вдоль геодезической.
5. (**Брахистохрона**) Строим горку высоты h и ширины x так, чтобы тело, залезшее на ее вершину в точке $(0, h)$ (и имеющее нулевую начальную скорость) достигло точки $(x, 0)$ максимально быстро. Предполагаем, что тело едет по горке без трения.
(a) (2) Найдите уравнение, которому удовлетворяет эта кривая.
(b) (2) Решите его.
6. (a) (2) Найдите уравнение, которому удовлетворяет профиль однородной цепочки с закрепленными концами.
(Указание: устойчивое положение равновесия отвечает минимуму потенциальной энергии.)
(b) (2) Решите это уравнение.