

Динамические системы — II

Листок 1

В скобках указано число баллов за задачу.

После 1 февраля 2014 года для задач 1–6 число баллов уменьшается вдвое.

1. (1) Пусть, для механической системы с одной степенью свободы $\ddot{x} = -U'(x)$, потенциальная энергия $U(x)$ имеет в точке $x = x_0$ невырожденный максимум (то есть $U'(x_0) = 0, U''(x_0) < 0$). На фазовой плоскости с координатами (x, y) , где $y = \dot{x}$, найдите уравнения касательных к сепаратрисам в точке $(x_0, 0)$.
2. (1) Замкнутая система состоит из двух материальных точек в трехмерном пространстве. Рассмотрим ее в некоторой инерциальной системе отсчета. Докажите, что если в начальный момент времени скорости обеих точек равны нулю, то эти точки все время будут двигаться по прямой, соединяющей их начальные положения.
3. (2) Замкнутая система состоит из двух материальных точек в трехмерном пространстве. Докажите, что для любых начальных условий существует такая инерциальная система координат, что в ней точки все время остаются в некоторой неподвижной плоскости.
4. (1) Докажите, что задача о движении замкнутой системы двух материальных точек в пространстве сводится к задаче о движении одной материальной точки в некотором центральном поле.
5. (2) Докажите, что если сила, действующая на материальную точку в трехмерном пространстве, зависит только от расстояния до начала координат и действует вдоль радиус-вектора точки, то эта сила потенциальна.
6. (1) Пусть частица движется в центральном поле с потенциальной энергией $U(r)$. Для каких r частица может двигаться (с ненулевой скоростью) по окружности радиуса r с центром в начале координат?
7. Частица массы m может двигаться по окружности радиуса l в вертикальной плоскости в поле силы тяжести (математический маятник).
 - (a) (2) Найдите закон движения, если кинетическая энергия в нижней точке E равна $2mgl$.
 - (b) (4) Пусть $E - 2mgl = \varepsilon > 0$. Оцените период обращения математического маятника при $\varepsilon \rightarrow 0$ с точностью до $o(1)$.