Лекция 3 (16 сентября)

Определение меры Жордана зависит от системы координат. Исследуем что происходит при заменах координат.

Лемма Измеримость по Жордану не изменятся при непрерывной замене координат.

Набросок доказательства. Достаточно доказать, что для непрерывных функций $\pi_i(x)$ множество $a_i < \pi_i(x) < b_i$ измеримо. Действительно, если Xизмеримо в координатах $y, y_i = \phi_i(x)$ т.е хорошо аппроксимируется снаружи и изнутри объединениями множеств вида $a_i < \pi_i(x) < b_i$, аппроксимируя эти множества x- параллелепипедами, получим требуемую аппроксимацию.

Для нужд интегрирования нам нужно сравнивать меры в разных системах координат.

Лемма. При линейной замене замене переменных объем умножается на определитель этой замены.

Доказательство. Достаточно вычислить объем параллелепипеда, натянутого на набор из n векторов $v^i = (v^i_1, v^i_2, \cdots v^i_n)$. Основная геометрическая идея: При изменении одного из векторов $v^i \to \tilde{v}^i = v^i - \lambda v^j, 0 < \lambda < 1$ треугольным образом объем не меняется, так как эти тела равносоставлены: для подмножества $J \subset [1 \ldots n]$ положим $v^J = \sum_{j \in J} v^j$; отрежем от параллелепипеда выпуклую оболочку векторов $v^j + V^I, I \subset [1 \ldots n-1] \setminus j, v^{[1 \ldots n]} - \tilde{v}^j$ и приставим ее, сдвинув на v^j по грани, натянутой на $v^j + V^I, I \subset [1 \ldots n-1] \setminus j$ к грани натянутой на $V^I, I \subset [1 \ldots n-1] \setminus j$.

Треугольными заменами строк и последующей перестановкой строк матрица (v^j_i) приводится к диагональной (метод Гаусса решения системы линейных уравнений. Для диагональной матрицы определитель равен произведению диагональных элементов, что совпадает с объемом.

Из близости дифференцируемой функции к ее линейной части следует оценка Объема малого криволинейного параллелепипеда.

Лемма.Пусть $\phi_i(X)$ набор из n дифференцируемых функций n переменных. Тогда объем тела $\Phi = a_i < \phi_i < f_i + \eta$ допускает оценку $\det(\partial\phi_i/\partial x_j(a_i))\eta^n + o(\eta^n)$.

Доказательство. Обозначим через $\phi^0_i(X)$ линейную часть

$$\phi(a_1 \cdots a_n) + \sum_j \det(\partial\phi_i/\partial x_j(a_i))(x_i - a_i)$$

функции $\phi_(X)$. Тогда $\phi_i(a_1+\epsilon_1\eta, \cdots, a_n+\epsilon_n\eta) - \phi^0_i(a_1+\epsilon_1\eta, \cdots, a_n+\epsilon_n\eta) = o(\eta)$. Тем самым, симметрическая разность множества Φ и параллелепипеда $a_i < \phi^0_i < f_i + \eta$ покрывается параллелепипедами с одной стороной длины $o(\eta$ и остальными сторонами порядка η, что и дает требуемую оценку.

Из последнего утверждения немедленно следует

ТеоремаПри дифференцируемой замене переменных верна следующая формула:

$$\int F(x) d\,x_1 d\,x_2 \cdots d\,x_n = \ intF(y) \det(\partial x_i/\partial y_j) d\,y_1 d\,y_2 \cdots d\,y_n$$